Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan
Stockholms universitet
Göteborgs universitet
Uppsala universitet

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH, SU, GU, UU

Matematikprovet GU

Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik, Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik

SU: Kandidatprogrammen i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

UU: Energisystem

Antagningsprov 2023 - MATEMATIK

2023-05-13, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna och kladdpapper lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talen a och b är reella och sådana att $|a| \neq |b|$ och $a^2 + b^2 > 0$. Givet att $x = \dfrac{(a^2+b^2)(a^{16}-b^{16})}{(a^2-b^2)(a^4+b^4)}$, så gäller att x är lika med

   (a) $a^4 + b^4$; (b) $(a^2+b^2)^2(a^8+b^8)$; (c) $(a^2+b^2)^2$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $a = 8$ och $x = \dfrac{(\sqrt[6]{a^2})^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{a^2+a}}{a^2 \cdot (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}}}$, så gäller att x är lika med

   (a) $3\sqrt[4]{2}$; (b) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{2}}$; (c) $\pm\dfrac{6}{\sqrt[4]{2}}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om x och y är reella tal och $\sqrt{x^2+2xy+y^2}+\sqrt{x^2-2xy+y^2}=2x$, så kan det **inte** vara sant att

   (a) $x > y$; (b) $x < y$; (c) $x = y$; (d) $x \geq 0$.

4. Om a är ett reellt tal ($a \neq 0,\ a \neq 1$), så gäller att

   (a) $\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \leq \frac{|a|-1}{|a|+1}$; (b) $\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \leq 1$; (c) $\left|\frac{a+1}{a-1}\right| \leq \frac{|a|+1}{|a|}$;
   (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

5. Om a är ett reellt tal ($a \neq 0,\ a \neq -1$), så gäller att

   (a) $\left|\frac{a-1}{a+1}\right| \leq \frac{|a|-1}{|a|+1}$; (b) $\left|\frac{a-1}{a+1}\right| \leq 1$; (c) $\left|\frac{a-1}{a+1}\right| \leq \frac{|a|+1}{|a|}$;
   (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

6. Om $x \boxplus y = \sin x - \cos y$ för alla reella tal x och y, så gäller för alla reella x, y att

   (a) $\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \boxplus \left(\frac{\pi}{2}-x\right) = x \boxplus x$; (b) $\left(\frac{\pi}{2}+y\right) \boxplus \left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -x \boxplus y$;
   (c) $\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \boxplus \left(\frac{\pi}{2}+y\right) = y \boxplus x$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla.

7. Antalet reella lösningar till ekvationen $|x+1|+|x-1|=2$ är

   (a) 1; (b) 2; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).

8. Givet är ekvationen $az^2+bz+c=0$, som har en icke-reell dubbelrot. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) någon av koefficienterna är icke-reell;
   (b) alla koefficienter är icke-reella;
   (c) någon av koefficienterna är reell;
   (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.

9. Olikheten $ax^2+bx+c>0$ (a, b, c reella) har ändligt många positiva heltalslösningar. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) $a > 0$; (b) $a \neq 0$; (c) $a < 0$; (d) inget av (a)-(c).

10. Antalet lösningar till ekvationen $2\sin^2 x + \cos x = 1$ i intervallet $(-\pi, \pi)$ är

    (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

11. För alla positiva reella tal x, y gäller att

    (a) $\ln x \cdot \ln y = \ln x + \ln y$; (b) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$;
    (c) $\ln(x+y) = \ln x \cdot \ln y$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

12. För alla positiva reella tal x och p gäller att

(a) $(\ln x)^p = p \ln x$; (b) $\ln px = p \ln x$;

(c) $\ln px = (\ln x)^p$ (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. Om $\sin \alpha = p$, och $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, så gäller att $\tan \alpha$ är lika med

(a) $\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (b) $\frac{|p|}{\sqrt{1-p^2}}$; (c) $\pm \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (d) inget av (a)-(c).

14. Om $\cos \alpha = p$, och $\pi < \alpha < 2\pi$, så gäller att $\sin 2\alpha$ är lika med

(a) $2p\sqrt{1-p^2}$; (b) $-2p\sqrt{1-p^2}$; (c) $\pm 2p\sqrt{1-p^2}$; (d) inget av (a)-(c).

15. Vinkeln α är godtycklig. Då gäller

(a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;

(b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;

(c) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$;

(d) ingen av formlerna gäller generellt.

16. En geometrisk summa är lika med 215. Den första termen är 5 och den sista är 320. Antalet termer i summan är

(a) 5; (b) 7; (c) annat tal; (d) en sådan geometrisk summa finns inte.

17. Bisektrisen till vinkeln vid hörnet A i triangeln ABC skär sidan BC i punkten L. Om $|AC| > |AB|$ så gäller att

(a) $|LC| > |LB|$; (b) $|LC| = |LB|$;

(c) $|LC| < |LB|$; (d) det går inte att avgöra.

18. Triangeln ABC har sidlängder som uppfyller $|AB|^2 > |BC|^2 + |CA|^2$. Då gäller att

(a) vinkeln vid hörnet C är spetsig; (b) vinkeln vid hörnet C är trubbig;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

19. Triangeln ABC har sidlängder som uppfyller $|AB| > |BC| + |CA|$. Då gäller att

(a) vinkeln vid hörnet C är spetsig; (b) vinkeln vid hörnet C är trubbig;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

20. Ett parallelltrapets (det vill säga en fyrhörning som har två parallella sidor) har diagonaler som har längder 3 längdenheter och 4 längdenheter och som bildar rät vinkel. Summan av de två parallella sidornas längder är då

(a) 10 l.e.; (b) 5 l.e.;

(c) annat tal; (d) det går inte att avgöra.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{7}}{\frac{1}{15}-1}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal p, för vilka ekvationen $x^2+2p^2x+8p=0$ har två olika reella lösningar som på tallinjen befinner sig på lika avstånd från talet -2. Ange det största talet p med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$, beräkna $f'(x)$ och ange $f'(-8)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\left(\sin^2 x+\frac{1}{x+1}\right)dx.$

25. En geometrisk talföljd har första element $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ och andra element $3+2\sqrt{2}$. Bestäm och ange den geometriska talföljdens tredje element.

26. Bestäm alla reella tal, för vilka funktionen
$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-4}\right).$$
är definierad. Ange det största heltalet i funktionens definitionsmängd.

27. Lös ekvationen
$$4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}}=6.$$
Ange ekvationens minsta lösning.

28. Lös olikheten
$$4\sqrt{x^2+9}-x^2\geq 4.$$
Ange antalet heltalslösningar till olikheten.

29. En triangel har en sida som är 8 längdenheter lång och en sida som är 5 längdenheter lång. Höjden mot den längre av de två sidorna är 3 längdenheter lång. Bestäm och ange längden av triangelns tredje sida.

30. Givet är triangeln ABC. Kvadraten $DEFG$ har hörnen D och E på sidan AB, hörnet F på sidan BC och hörnet G på sidan AC. Om triangel ABC har area 28 areaenheter och triangel GFC har area 7 areaenheter, bestäm och ange längden av sidan AB.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

I triangeln ABC är vinkeln vid hörnet C dubbelt så stor som vinkeln vid hörnet B. Sidan BC har längden a och sidan CA har längden b (längdenheter). Bestäm längden c av sidan AB (det vill säga, uttryck c i termer av a och b).