Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik, Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik, Datateknik hing (Kista)

SU: Kandidatprogrammen i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

UU: Energisystem

Antagningsprov 2022 - MATEMATIK - SVAR

A.

1c
2d
3d
4c
5c
6a
7c
8d
9b
10a
11d
12b
13d
14a
15b
16d
17d
18a
19c
20c

B.

21: $\frac{8}{7}$;

22: 0;

23: $-\frac{1}{4}$;

24: Integralen finns inte (divergent);

25: 2;

26: $\ln(1+\sqrt{2})$;

27: 3π;

28: $30°$;

29: $\dfrac{8}{3}$ l.e.;

30: $\sqrt{91}$ l.e..

C. *Lösning:* Kvadratroten ur ett tal a är per definition det icke-negativa tal vars kvadrat är lika med a. Ur definitionen följer att $a \geq 0$ och $\sqrt{a} \geq 0$.

För att de tre kvadratrötterna som förekommer ska vara definierade krävs att $x-1 \geq 0,\ x+1 \geq 0,\ x \geq 0$. För att ingen av nämnarna ska vara lika med noll krävs att $x \neq 1,\ x \neq -1,\ x \neq 0$. Definitionsmängden består alltså av alla x sådana att $x > 1$.

Eftersom $0 < \sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$ har vi att $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > 0$ för alla x i definitionsmängden. Högerledet är också positivt för alla tillåtna x. Det betyder att vi kan kvadrera och vara säkra på att vi efter kvadrering får en olikhet ekvivalent med den givna. Kvadrering ger olikheten

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 = \frac{2x - 2\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} > \frac{2}{x}.$$

Eftersom $x^2 - 1 > 0$ och $x > 0$ kan vi förlänga med båda nämnarna och behålla olikhetstecknet, vilket (efter förkortning med $2 > 0$) ger den ekvivalenta olikheten

$$x(x - \sqrt{x^2-1}) > x^2 - 1.$$

Enkel omskrivning leder till

$$1 > x\sqrt{x^2-1}.$$

Återigen är båda leden positiva, så att kvadrering leder till den ekvivalenta olikheten

$$x^4 - x^2 - 1 < 0.$$

Sätt $t = x^2$. Andragradsfunktionen $f(t) = t^2 - t - 1$ antar negativa värden mellan sina nollställen, som är $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Eftersom $t = x^2 > 1$ kommer olikheten att gälla för

$$1 < x^2 < \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

och eftersom $x > 1$ får vi att den givna olikheten är sann om och endast om

$$1 < x < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$