

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
GÖTEBORGS UNIVERSITET
UPPSALA UNIVERSITET

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH, SU, GU, UU
Matematikprovet GU

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik,
Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik,
Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik,
Datateknik hing (Kista)

SU: Kandidatprogrammen i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt
Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

UU: Energisystem

Antagningsprov 2022 - MATEMATIK

2022-05-21, kl. 9.00 – 12.00

Skrivtid: 180 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna och kladdpapper lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a = \sqrt[3]{5}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ och $x = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{ab}$, så gäller att x är lika med

(a) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$; (b) $2\sqrt[3]{5}$; (c) 4; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $a = \frac{1}{3}$, $b = 2$ och $x = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^3}{ab}$, så gäller att x är lika med

(a) $3\sqrt{6}$; (b) $6\sqrt{2}$; (c) $3\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om a och b är positiva reella tal och $x = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} - \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$, så gäller att x är lika med
- (a) $2a$; (b) $2b$; (c) $2ab$; (d) inget av (a)-(c).
4. Om $0 < a < 1$ och $b > 2$, så gäller att
- (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 3$; (b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{3}{2}$; (c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$; (d) inget av (a)-(c).
5. Om $0 < a < 1$ och $b > 2$, så gäller att
- (a) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > \frac{3}{2}$; (b) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 1$; (c) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$; (d) inget av (a)-(c).
6. Om $x \boxplus y = x^2 + xy + y^2$ för alla reella tal x och y , och de reella talen a, b är sådana att $a \boxplus b > 0$, så kan man dra slutsatsen att
- (a) $a^2 + b^2 \neq 0$; (b) $a > 0$ och $b > 0$; (c) $a + b \neq 0$;
 (d) inget av (a)-(c) behöver gälla.
7. Talet x är sådant att $x^2 > x$. Man kan då dra slutsatsen att
- (a) $x < 0$; (b) $x > 1$; (c) $x < 0$ eller $x > 1$; (d) inget av (a)-(c).
8. Antalet heltalslösningar till olikheten $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-4}$ är
- (a) 0; (b) 4; (c) 5; (d) inget av (a)-(c).
9. Givet är ekvationen $2x^2 + x + p = 0$, där p är ett negativt reellt tal. För ekvationen gäller då att
- (a) den har två olika icke-reella lösningar;
 (b) den har två reella lösningar med olika tecken;
 (c) den har två reella lösningar med samma tecken;
 (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.
10. Antalet lösningar till ekvationen $\left| \sin \frac{x}{2} \right| = 1$ i intervallet $(-2\pi, \pi)$ är
- (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).
11. Summan $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2022}}$ är lika med
- (a) $2(2^{2022} - 1)$; (b) $\frac{2^{2022} - 1}{2}$; (c) $\frac{2^{2022} - 1}{2^{2021}}$; (d) inget av (a)-(c).
12. För alla positiva reella tal x, y gäller att
- (a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; (b) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
 (c) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{16}{5} - \frac{4}{3}}{\frac{2}{15} + \frac{3}{2}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal p , för vilka ekvationen $px^2 + (1 + p^2)x + p = 0$ har två olika lösningar sådana att kvoten mellan dem är lika med 2. Ange summan av det största och det minsta p med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x) = e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$, ange $f'(1)$.

24. Beräkna $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{x} - 3e^{-x} + \sin(\pi x) \right) dx$.

25. Bestäm och ange det minsta heltalet, för vilket funktionen

$$f(x) = \log_x(2^x - 1).$$

är definierad.

26. Lös ekvationen

$$\ln(e^x + 1) - \ln(e^x - 1) = x.$$

Ange summan av ekvationens lösningar.

27. Lös ekvationen

$$\cos^2 x + \cos 2x = 2.$$

Ange summan av ekvationens lösningar i intervallet $[0, 2\pi]$.

28. Bestäm och ange den minsta vinkeln i en triangel som har sidlängder 1, $\sqrt{3}$ och 2 (längdenheter).

29. Fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets, där $AB \parallel CD$. Diagonalerna AC och BD skär varandra i punkten O . Om $|AB| = 10$, $|CD| = 5$ och $|BD| = 8$ längdenheter, beräkna och ange längden av sträckan DO .

30. En parallelogram har sidlängder 3 och 7 (längdenheter). Om den ena diagonalens längd är 5 (längdenheter), beräkna och ange den andra diagonalens längd.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan.(max 5p)

Lös olikheten

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \sqrt{\frac{2}{x}}.$$