Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan
Stockholms universitet
Göteborgs universitet
Uppsala universitet

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH, SU, GU, UU

Matematikprovet GU

Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik, Datateknik hing (Kista)

SU: Kandidatprogrammen i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

UU: Energisystem

Antagningsprov 2021 - MATEMATIK

2021-05-22, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna och kladdpapper lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{3}$, och $x = \dfrac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$, så gäller att

   (a) $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; (b) $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; (c) $x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $a = \cos\dfrac{\pi}{4}$, $b = \sin\dfrac{\pi}{3}$ och $x = \sqrt{\dfrac{ab}{1+a^2b^2}}$, så gäller att x är lika med

   (a) $\dfrac{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{19^{\frac{1}{2}}}$; (b) $\dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{3}$; (c) $\dfrac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}}{11^{\frac{1}{2}}}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $2^{x-2} = 8^{2x-1}$, så gäller att

   (a) $x = -\frac{1}{5}$; (b) $x = 0$; (c) $x = \frac{1}{5}$; (d) inget av (a)-(c).

4. Om a och b är reella tal (inget av dem lika med 0) sådana att $a > b$, så kan man dra slutsatsen att

   (a) $-a > -b$; (b) $a^2 > b^2$;
   (c) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.

5. Om a och b är reella tal (inget av dem lika med 0) sådana att $|a| > |b|$, så kan man dra slutsatsen att

   (a) $-a > -b$; (b) $a^2 > b^2$;
   (c) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.

6. Om $x \boxplus y = \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2} - 2y + x$ för alla reella tal x och y, så gäller för alla reella tal x, y att

   (a) $x \boxplus y = 2x$; (b) $(-x) \boxplus y = 2x$; (c) $x \boxplus (-y) = 2x$;
   (d) inget av (a)-(c) gäller för alla reella tal x, y.

7. Talen a, b, c är reella och sådana att $a^2+b^2+c^2 > 0$. Ekvationen $ax^2+bx+c = 0$ har två olika lösningar. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) $c < 0$; (b) $a > 0$; (c) $b^2 \neq 4ac$; (d) inget av (a)-(c).

8. Talen a, b, c är reella och $ac < 0$. För ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ kan man då dra slutsatsen att

   (a) den har två olika icke-reella lösningar;
   (b) den har två reella lösningar med samma tecken;
   (c) den har två reella lösningar med olika tecken;
   (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.

9. Talen 2 och 4 är lösningar till ekvationen $x^n + ax^{n-1} + \cdots + bx + c = 0$. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) $n \leq 2$; (b) $n = 2$; (c) $n \geq 2$ (d) inget av (a)-(c).

10. En kund köper en vara med 15 % rabatt. Det visar sig att priset reducerats med 60 kronor. Kunden får då betala

    (a) 340 kr; (b) 400 kr; (c) 460 kr; (d) inget av (a)-(c).

11. Antalet (reella) heltalslösningar till olikheten $\frac{4x+1}{x+4} \leq \frac{1}{x}$ är

    (a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) inget av (a)-(c).

12. För alla positiva reella tal x, y gäller att

(a) $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; (b) $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

(c) $\frac{1}{x+y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. För alla reella x, y gäller att

(a) $e^x + e^y = e^{xy}$; (b) $e^x = \frac{e^{x+y}}{e^y}$;

(c) $e^{x+y} - e^x - e^y = 0$ (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

14. För alla $x, y > 0$ gäller att

(a) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x+y)$; (b) $\ln(xy) = \ln x \cdot \ln y$;

(c) $\ln(x+y) - \ln x = \ln y$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

15. Om $\cos\alpha = p$, och $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, så gäller att $\cos\frac{\alpha}{2}$ är lika med

(a) $-\sqrt{\frac{1-p}{2}}$; (b) $\sqrt{\frac{1-p}{2}}$; (c) $\sqrt{\frac{1+p}{2}}$; (d) inget av (a)-(c).

16. För alla reella x, y gäller att

(a) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$;

(b) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

(c) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$;

(d) $\sin x + \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

17. En saltlösning innehåller 1 % salt, upplöst i vatten. Efter att den stått öppet ett tag har en del av vattnet avdunstat, så att lösningen tappat x % av sin massa och salthalten blivit 10 %. Då gäller

(a) $x < 80$; (b) $x = 80$;

(c) $x > 80$; (d) det går inte att avgöra.

18. Polynomet $P(x) = x^{173} - 5x^{157} + \cdots + 4x + 12 = 0$ har koefficienter som är heltal. Talet a kan **inte** vara lösning till ekvationen $P(x) = 0$, oavsett koefficienterna som inte syns, för

(a) $a = 2$; (b) $a = -3$; (c) $a = 5$ (d) inget av (a)-(c).

19. Den minsta vinkeln i en triangel är $60°$. Då gäller att

(a) triangeln är rätvinklig; (b) triangeln är likbent;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

20. Vinklarna i en triangel bildar en aritmetisk följd. Då gäller att

(a) en av vinklarna är $60°$; (b) ingen av vinklarna är $60°$;

(c) det går inte att avgöra; (d) det finns ingen sådan triangel.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{3}{7}-\frac{7}{12}}{\frac{1}{12}+\frac{2}{15}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal p, för vilka ekvationen $x^2 + 2px + (6 - p) = 0$ har två olika negativa lösningar. Ange antalet heltal p med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x) = \dfrac{1-\cos \pi x}{1+\cos \pi x}$, ange $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{x+1} + 2e^{3x} - \sin(\pi - x)\right) dx$.

25. Bestäm och ange det största heltalet, för vilket funktionen

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{3} - 3^x\right).$$

är definierad.

26. Lös olikheten $\dfrac{x-1}{x^2+6x+9} \geq \dfrac{1}{x-1}$. Ange summan av olikhetens heltalslösningar.

27. Lös ekvationen

$$3^{2\cos^2 x} + 9^{\cos 2x} = 4.$$

Ange ekvationens största lösning i intervallet $[0, 2\pi]$.

28. Punkterna M och N är mittpunkter på sidorna CA respektive BC i triangeln ABC. Givet att vinkeln vid hörnet C i är $120°$ och att $|BC| = 3$, $|CA| = 2$ (längdenheter), beräkna och ange längden av sträckan MN.

29. Punkterna A, B, C och D ligger (i den ordningen) på en cirkel med radie R (längdenheter). Givet att $AB = BC = R$, bestäm och ange vinkeln vid hörnet D i fyrhörningen $ABCD$ (i grader eller radianer).

30. En triangel har sidlängderna 2, 3 och 4 längdenheter. Beräkna och ange längden av höjden mot triangelns längsta sida.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan.(max 5p)

Lös ekvationen

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2-\sqrt{x}.$$