Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan
Stockholms universitet

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH, SU & Matematikprovet SU

Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

SU: Kandidatprogrammen i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

SU: Kandidatprogrammen i matematik, i matematik och ekonomi, samt i matematik och datavetenskap

Antagningsprov 2019 - MATEMATIK

2019-05-11, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{3}{2}$, och $x = \dfrac{b}{a^{-2} + b^{-1}}$, så gäller att

   (a) $\sqrt{x} = \dfrac{4}{3}$; (b) $\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; (c) $\sqrt{x} = \dfrac{3}{4}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $x = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, där a, b, c är reella tal, och om $u = a + b$ och $v = a - b$, så gäller att x är lika med

   (a) $(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)$; (b) $c^2(u^2 - v^2)$;
   (c) $(c^2 - u^2)(v^2 - c^2)$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $s = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 24x + 144}$, och $-10 < x < -8$, så gäller att

   (a) $s = 2x + 15$;
   (b) $s = 15$;
   (c) $s = 9$;
   (d) inget av (a)-(c) gäller för alla x sådana att $-10 < x < -8$.

4. Om a och b är reella tal sådana att $|a| = |b|$, så kan man dra slutsatsen att

   (a) $a = b$; (b) $a^2 = b^2$;
   (c) $a^3 = b^3$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.

5. Om z och w är komplexa tal sådana att $|z| = |w|$, så kan man dra slutsatsen att

   (a) $z = w$; (b) $z^2 = w^2$;
   (c) $z^3 = w^3$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla generellt.

6. Om $m \boxplus n = m^2 - mn + n^2 + m - n$ för alla positiva heltal m och n, så gäller för alla positiva heltal m, n att

   (a) $m \boxplus n < 0$; (b) $m \boxplus n = 0$; (c) $m \boxplus n > 0$;
   (d) inget av (a)-(c) gäller för alla positiva heltal m, n.

7. Talet a är reellt och sådant att ekvationen $x^2 + 2(a-1)x - a + 7 = 0$ har två olika reella lösningar. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) $a < -2$ eller $a > 3$; (b) $a \geq 0$; (c) $-2 < a < 3$; (d) inget av (a)-(c).

8. Talet a är reellt och sådant att ekvationen $x^2 + 2(a-1)x - a + 7 = 0$ har två olika reella positiva lösningar. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) $a < -2$; (b) $3 < a < 7$; (c) det är omöjligt; (d) inget av (a)-(c).

9. Talet a är reellt och sådant att ekvationen $x^2 + 2(a-1)x - a + 7 = 0$ har två olika reella negativa lösningar. Man kan då dra slutsatsen att

   (a) $a < -2$; (b) $3 < a < 7$; (c) det är omöjligt; (d) inget av (a)-(c).

10. Antalet (reella) heltalslösningar till olikheten $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{3}$ är

    (a) 0; (b) 2; (c) 4; (d) inget av (a)-(c).

11. Antalet (reella) heltalslösningar till olikheten $\sqrt{x^2-1} < x - 1$ är

    (a) 0; (b) 2; (c) 4; (d) inget av (a)-(c).

12. För alla positiva reella tal x, y gäller att

    (a) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;
    (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+y}} > \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. För alla $x, y > 0$ gäller att

    (a) $\ln x + \ln y = \ln(x+y)$; (b) $\ln(x^y) = \ln y \cdot \ln x$;
    (c) $\ln(xy) - \ln x = \ln y$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

14. För alla $b > 0$ och $a > 0,\ a \neq 1$, gäller att

(a) $\ln b = \dfrac{\log_a b}{\log_a e}$; (b) $\ln b = \dfrac{\log_a e}{\log_a b}$;

(c) $\ln b = \log_a b \cdot \log_a e$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

15. Om $\cos\alpha = p$, och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

(a) $-\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{|p|}$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{|p|}$; (d) kan ej avgöras.

16. För alla reella x gäller att

(a) $2\sin^2\dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$; (b) $2\sin^2\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$;

(c) $2\cos^2\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

17. Om α, β och γ är vinklarna i en triangel, så gäller att

(a) $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\gamma$; (b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$;

(c) $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

18. I en romb gäller *inte* att

(a) diagonalerna delar varandra mitt itu;
(b) diagonalerna bildar rät vinkel;
(c) diagonalerna är bisektriser till vinklarna vid hörnen;
(d) inget av (a)-(c).

19. En fyrhörning är en romb, givet att

(a) dess diagonaler delar varandra mitt itu;
(b) dess diagonaler bildar rät vinkel;
(c) dess diagonaler är bisektriser till vinklarna vid hörnen;
(d) inget av (a)-(c).

20. Låt $a = |BC|,\ b = |CA|,\ c = |AB|$ vara sidlängderna i triangeln ABC. Beteckna med h_c längden av höjden mot sidan AB och med m_c längden av medianen från hörnet C (det vill säga avståndet från C till mittpunkten på sidan AB). Nedan följer fyra påståenden om samband mellan dessa sträcklängder. Markera det påstående som kan vara uppfyllt utan att triangeln ABC är rätvinklig.

(a) $a^2 + b^2 = c^2$; (b) $ab = ch_c$;

(c) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{h_c^2}$; (d) $2m_c = c$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{7}{9}-\frac{5}{6}}{2-\frac{19}{15}}.$$

Ange svaret på formen $\dfrac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\dfrac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal p, för vilka ekvationen $x^2+2px+(p^2-1)=0$ har två reella lösningar $x_1 < x_2$, sådana att $\dfrac{x_1}{x_2}=2$. Ange det största talet p med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x)=e^{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, ange $f'(1)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x}-x^{\frac{1}{7}}-\sin 2x\right)dx.$

25. Lös ekvationen

$$\ln(x+1)-\ln(x-1)=\ln x.$$

Ange ekvationens minsta lösning.

26. Lös olikheten $\dfrac{1}{|x-3|}-\dfrac{1}{|x+7|}<0$. Ange olikhetens största heltalslösning.

27. Lös ekvationen

$$\sqrt{x}=\sqrt{4-x}-2.$$

Ange ekvationens största lösning.

28. Lös ekvationen

$$\sin x-\cos x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ange den största lösningen i intervallet $[0, 2\pi]$.

29. Vinkeln vid hörnet C i triangeln ABC är trubbig. Givet att $|BC|=a$, $|CA|=b$ (längdenheter), och triangelns area är S (areaenheter), beräkna och ange längden av sidan AB, uttryckt i termer av a, b och S.

30. Triangeln ABC är likbent, med $AC=BC$. Vinkeln vid hörnet C är $30°$. Triangelns area är S areaenheter. Beräkna och ange triangelns omkrets, uttryckt i termer av S.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan.(max 5p)

Den räta linjen l och punkterna A och B ligger i ett plan. Längden av sträckan AB är 20 längdenheter. Avståndet från punkten A till linjen l är 2 längdenheter, och avståndet från punkten B till linjen l är 14 längdenheter. Bestäm längden av ortogonalprojektionen av sträckan AB på linjen l.