

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH & Matematikprovet SU

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med
fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

SU: Kandidatprogrammen i matematik samt matematik och ekonomi

Antagningsprov 2018 - MATEMATIK

2018-05-05, kl. 9.00 – 12.00

Skrivtid: 180 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $x = \frac{15^4 + 105^2 - 225 \cdot 210}{130^2 - 50^2}$, så är x lika med

- (a) $\frac{1}{10}$; (b) 1; (c) 10; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $z = (1 + i\sqrt{3})^n$, där n är ett positivt ^{heltal} heltal, så finns ~~reella tal~~ ^{heltal} A och B sådana att z är lika med

- (a) $A + B\sqrt{3}$; (b) $A + Bi\sqrt{3}$; (c) $A\sqrt{3} + Bi$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $z = (1 + i\sqrt{3})^n$, där n är ett positivt heltal, så gäller att $|z|$ är lika med

- (a) 2^{-n} ; (b) 2; (c) 2^n ; (d) inget av (a)-(c).

4. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, där $a \neq 0$, har två olika lösningar för

- (a) $b^2 - 4ac \neq 0$; (b) $b^2 - 4ac \neq 0$;
(c) $b^2 - 4ac \neq 0$; (d) inget av (a)-(c).

5. Ekvationen $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^x$ har
- (a) ingen reell lösning; (b) en reell lösning;
 (c) oändligt många reella lösningar; (d) inget av (a)-(c).
6. Om $x \boxplus y = \ln(x^2 + 1) + \ln(y^4 + 1)$ för alla reella tal x och y , så gäller för alla reella x och y att
- (a) $x \boxplus y = y \boxplus x$; (b) $x \boxplus y \geq \ln 2$;
 (c) $x \boxplus y > 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla reella tal x och y .
7. Två av ett rätblocks kantlängder ökar med 10% vardera, medan den tredje kantlängden minskar med 20%. Rätblockets volym har då
- (a) ökat; (b) förblivit oförändrad; (c) minskat; (d) kan ej avgöras.
8. Två av ett rätblocks kantlängder minskar med 10% vardera, medan den tredje kantlängden ökar med 20%. Rätblockets volym har då
- (a) ökat; (b) förblivit oförändrad; (c) minskat; (d) kan ej avgöras.
9. Olikheten $\frac{x^3 - 8}{x - 1} \geq 0$ har samma lösningar som olikheten
- (a) $\frac{x - 2}{x - 1} \geq 0$; (b) $(x^3 - 8)(x - 1) \geq 0$; (c) $x^3 - 8 \geq 0$; (d) inget av (a)-(c).
10. Olikheten $x^2 - px + p^2 \leq 0$, där $p \neq 0$ är ett reellt tal, gäller
- (a) för alla reella tal x ; (b) endast för $x = p$;
 (c) för inga reella tal x ; (d) inget av (a)-(c).
11. För alla positiva reella tal x, y gäller att
- (a) $\frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$;
 (c) $\frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
12. För alla $x, y > 0$ gäller att
- (a) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x + y)$; (b) $\ln x - \ln y = \frac{\ln x}{\ln y}$;
 (c) $\ln(xy) = \ln x \cdot \ln y$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. Om $\sin \alpha = p$, och $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, så gäller att $\cos \alpha$ är lika med
 (a) $-\sqrt{1-p^2}$; (b) $\sqrt{1-p^2}$; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.
14. Om $\tan \alpha > 0$, så gäller att
 (a) $\tan(\pi - \alpha) < 0$; (b) $\sin(\pi - \alpha) < 0$;
 (c) $\cos(\pi - \alpha) > 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
15. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har reella koefficienter och två icke-reella lösningar. Då gäller att
 (a) $c > 0$; (b) $c = 0$; (c) $c < 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.
16. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har reella koefficienter och en lösning som är $x_1 = 2 + i$. För ekvationens andra lösning x_2 gäller då att
 (a) $x_2 = x_1$; (b) x_2 är ett reellt tal;
 (c) $x_2 = 2 - i$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla.
17. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har två olika reella lösningar. Då gäller att
 (a) koefficienterna a, b, c är reella; (b) koefficienten b är reell;
 (c) koefficienten c är reell; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla.
18. Talet $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$ är lika med
 (a) $\tan \frac{\pi}{4}$; (b) $\tan \frac{\pi}{8}$;
 (c) $\tan \frac{\pi}{12}$; (d) inget av (a)-(c).
19. En regelbunden åttahörning, inskriven i en cirkel¹ med radie R (längdenheter), har area (i areaenheter)
 (a) $2R^2$; (b) $2R^2 + 4R$; (c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}R^2$; (d) $2\sqrt{2}R^2$.
20. Om a och d betecknar sidlängden och diagonallängden i en regelbunden femhörning (angivna i samma längdenhet), respektive, så gäller att förhållandet $\frac{d}{a}$ är lika med
 (a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; (b) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$;
 (c) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; (d) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.

¹det vill säga, åttahörningens alla hörn ligger på cirkeln

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{3}{16} + \frac{2}{15}}{\frac{1}{6} - \frac{3}{7}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Bestäm alla reella tal p , för vilka ekvationen $x^2 - 2px + 2 = 0$ har två reella lösningar $x_1 < x_2$, sådana att $\frac{x_1}{x_2} = 2$. Ange det största talet p med den egenskapen.

23. Givet funktionen $f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 5}$, ange $f'(3)$.

24. Beräkna $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^{\frac{7}{2}} - e^{-2x} \right) dx$.

25. Lös ekvationen

$$\frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x} = 7.$$

Ange ekvationens största lösning.

26. Lös olikheten $\sqrt{1 - |x|} \leq x - 1$. Ange olikhetens minsta lösning.

27. Lös ekvationen

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin x.$$

Ange summan av de lösningar som ligger i intervallet $\left[-\frac{4\pi}{3}, 2\pi \right]$.

28. Givet är en triangel ABC . Bisektriserna till vinklarna vid hörnen A och B skär varandra i punkten I . Om man vet att vinkeln vid C är 80° , bestäm och ange den spetsiga vinkeln som bisektriserna bildar vid I .

29. Fyrhörningen $ABCD$ är sådan att sidan AB är parallell med sidan CD . Punkterna M och N är mittpunkter på sidorna AD och BC , respektive. Givet att $|AB| = a$, $|CD| = b$ (längdenheter), där $a > b$, bestäm och ange längden av sträckan MN .

30. Cirkelarna k_1 och k_2 , med radier R och r , tangerar varandra. Linjen l tangerar cirkelarna i punkterna T_1 och T_2 , respektive, där $T_1 \neq T_2$. Bestäm och ange längden av sträckan T_1T_2 (alla längder anges i samma längdenhet).

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan.(max 5p)

Givet att $a \geq 0$, finn alla reella lösningar till ekvationen

$$x^2 + |x - a| - |x + a| = 0.$$