CHALMERS: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

SU: Kandidatprogrammen i matematik samt matematik och ekonomi

Antagningsprov 2018 - MATEMATIK - SVAR

A.

1b
2b
3c
4b
5b
6d
7c
8c
9a
10c
11d
12d
13a
14a
15d
16c
17d
18b
19d
20c

B.

21: $-\frac{49}{40}$;

22: $-\frac{3}{2}$;

23: $\frac{3}{16}$;

24: $\ln 2 + \frac{1}{9} \cdot 2^{\frac{11}{2}} + \frac{1}{2} \cdot e^{-4} - \frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2}$;

25: $\frac{2\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$;

26: 1;

27: π;

28: $50°$;

29: $\frac{a+b}{2}$ (l.e.);

30: $2\sqrt{Rr}$ (l.e.).

C. *Lösning:* *(i)* Låt först $a = 0$. Vi ska då lösa ekvationen

$$x^2 + |x| - |x| = x^2 = 0,$$

som endast har lösningen $x = 0$.

(ii) Låt nu $a > 0$. Vi vill göra oss av med absolutbeloppen. Hur vi gör det kommer att ändras när x passerar de punkter där uttrycken innanför absolutbeloppen byter tecken. Vi behöver alltså titta på följande tre fall för x: $-\infty < x < -a$, $-a \leq x < a$, $a \leq x < \infty$.

$-\infty < x < -a$: Vi har $x - a < 0$, och $x + a < 0$, så att

$$x^2 + |x - a| - |x + a| = x^2 - (x - a) + (x + a) = x^2 + 2a = 0.$$

Eftersom $a > 0$ ser vi att det inte finns några lösningar x som uppfyller $-\infty < x < -a$.

$-a \leq x < a$: Vi har $x - a < 0$, och $x + a \geq 0$, så att

$$x^2 + |x - a| - |x + a| = x^2 - (x - a) - (x + a) = x^2 - 2x = x(x - 2) = 0.$$

Ekvationen har lösningarna $x = 0$, som alltid uppfyller $-a \leq 0 < a$, samt $x = 2$, som uppfyller olikheterna endast för $a > 2$.

$a \leq x < \infty$: Vi har $x - a \geq 0$, och $x + a \geq 0$, så att

$$x^2 + |x - a| - |x + a| = x^2 + (x - a) - (x + a) = x^2 - 2a = 0.$$

Det finns endast en lösning som skulle kunna vara större än eller lika med $a > 0$, och det är $x = \sqrt{2a}$. Olikheten $\sqrt{2a} \geq a$ är (för $a > 0$) ekvivalent med $a \leq 2$.

Den givna ekvationen har alltså lösningarna

$$\begin{aligned} &x = 0, \quad \text{för alla } a \geq 0; \\ &x = \sqrt{2a}, \quad \text{för } 0 < a \leq 2; \\ &x = 2, \quad \text{för } a > 2. \end{aligned}$$