

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

SU: Kandidatprogrammen i matematik samt matematik och ekonomi

## Antagningsprov 2017 - MATEMATIK - SVAR

A.

1d

2c

3c

4b

5b

6b

7d

8d

9d

10a

11b

12b

13a

14a

15c

16a

17d

18c

19a

20d

B.

21:  $-\frac{10}{3}$ ;

22: 3;

23:  $-\frac{12}{25} \sin \frac{2}{5}$ ;

24:  $\frac{1}{3} + \cos 1 - \frac{1}{e}$ ;

25:  $\frac{25\pi}{2}$ ;

26:  $\sqrt{2}$ ;

27:  $\log_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ;

28:  $\frac{21}{8}$  (l.e.);

29:  $2a(\cos \varphi + \sin \varphi)$  (l.e.);

30:  $\frac{3a}{2}$  (l.e.).

C. *Lösning:* Beteckna vinkeln vid  $A$  i triangel  $ABC$  med  $\alpha$ , och låt  $P$  vara den ortogonala projektionen av punkten  $C'$  på linjen  $AB$ . Rotationen bevarar längder och vinklars storlek, vilket betyder att  $\angle B'AC' = \alpha$ ,  $\angle BAC' = 2\alpha$ . Om  $\alpha < 45^\circ$ , så kommer  $P$  att ligga innanför sträckan  $AB$ ; om  $\alpha = 45^\circ$ , så kommer  $P$  att sammanfalla med  $A$ , och om  $\alpha > 45^\circ$ , så kommer  $P$  att ligga utanför sträckan  $AB$ . När  $P = A$  är avståndet från  $C'$  till linjen  $AB$  lika med  $C'P = C'A = CA = b$ . I båda de andra fallen bildas en rätvinklig triangel  $APC'$ , med rät vinkel vid  $P$  och hypotenusan  $C'A = b$ . I fallet när  $P$  ligger innanför sträckan  $AB$  är avståndet lika med längden av kateten  $C'P$ , och vi har  $C'P = b \sin 2\alpha$ . Slutligen, om  $P$  ligger utanför  $AB$ , så är avståndet  $C'P = b \sin (180^\circ - 2\alpha) = b \sin 2\alpha$ . Vi har, enligt formeln för sinus av dubbla vinkeln, definitionen för sinus och cosinus och Pythagoras sats,

$$b \sin 2\alpha = 2b \sin \alpha \cos \alpha = 2b \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{2ab^2}{c^2} = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Notera att man för  $\alpha = 45^\circ$  får  $a = b$ , och

$$\frac{2ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{2b^3}{2b^2} = b,$$

det vill säga den ovan härledda formeln för avståndet visar sig gälla även i det fallet.