Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan
Stockholms universitet

Matematik- och fysikprovet Chalmers, KTH & Matematikprovet SU

Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

SU: Kandidatprogrammen i matematik samt matematik och ekonomi

# Antagningsprov 2017 - MATEMATIK

2017-05-13, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du rekommenderas att ta med dig tesen med dina svar inringade / ifyllda, för att i efterhand kunna jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a, b > 0$, och $x = \dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$, så är $x$ lika med

   (a) $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2$; (b) $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;
   (c) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla $a, b > 0$.

2. Om $x = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$, så är $x$ lika med

   (a) 6; (b) $2\sqrt{3}$; (c) $\sqrt{6}$; (d) annat svar.

3. Mängden av alla reella $x$, för vilka likheten $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ gäller, består av

   (a) alla reella $x$;
   (b) alla reella $x$, sådana att $|x| \geq 1$;
   (c) alla reella $x$, sådana att $x \geq 1$;
   (d) inget av (a)-(c).

4. Ekvationen $\dfrac{6}{x-3} - \dfrac{9}{x-2} = \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{4}{x-1}$ har

(a) ingen reell lösning; (b) en reell lösning;
(c) två reella lösningar; (d) inget av (a)-(c).

5. Ekvationen $\left(\dfrac{6}{5}\right)^x = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3$ har

(a) ingen reell lösning; (b) en reell lösning;
(c) två reella lösningar; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $x \boxplus y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ för alla positiva reella tal $x$ och $y$, så gäller att

(a) $x \boxplus y = -(y \boxplus x)$; (b) $x \boxplus y \geq 2$;
(c) $x \boxplus y = (y \boxplus x)^{-1}$; (d) inget av (a)-(c).

7. Givet att $y > 0$, så gäller att olikheten $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ har samma lösningar som olikheten

(a) $x > y$; (b) $x < y$; (c) $y - x > 1$; (d) inget av (a)-(c).

8. En rektangels ena sida ökar med 10%, dess andra sida ökar med 30%. Rektangelns area har då ökat med

(a) 144%; (b) 103%; (c) 143%; (d) inget av (a)-(c).

9. En geometrisk summa är lika med 192. Dess två första termer är 3 och $-6$. Antalet termer i summan är

(a) 6; (b) 7; (c) annat tal; (d) en sådan geometrisk summa finns inte.

10. En geometrisk summa är lika med $-63$. Dess två första termer är 3 och $-6$. Antalet termer i summan är

(a) 6; (b) 7; (c) annat tal; (d) en sådan geometrisk summa finns inte.

11. För alla reella $x, y$ gäller att

(a) $e^{x+y} = e^x + e^y$; (b) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$;
(c) $e^x + e^y = e^{xy}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

12. För alla $x, y > 0$ gäller att

(a) $\ln x + \ln y = \ln(x+y)$; (b) $\ln x + \ln y = \ln(xy)$;
(c) $\ln(x+y) = \ln x \cdot \ln y$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. Om $\sin\alpha = p$, och $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

(a) $-\dfrac{|p|}{\sqrt{1-p^2}}$; (b) $-\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (c) $\pm\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (d) annat svar.

14. Om $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så gäller att

(a) $\tan(\pi-\alpha) > 0$; (b) $\tan(\pi-\alpha) = 0$;
(c) $\tan(\pi-\alpha) < 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

15. Om $\alpha, \beta, \gamma$ är vinklarna i en triangel och $\alpha > \frac{\beta+\gamma}{2}$, så följer att

(a) $\alpha$ är trubbig; (b) $\alpha$ är den största vinkeln i triangeln;
(c) $\alpha > 60^\circ$; (d) inget av (a)-(c).

16. Om $A = 3\sqrt[3]{2}$, och $B = 1 + 2\sqrt[3]{3}$, så gäller

(a) $A < B$; (b) $A = B$; (c) $A > B$; (d) talen kan ej jämföras.

17. Om $A = 3i\sqrt[3]{2}$, och $B = 1 + 2i\sqrt[3]{3}$, så gäller

(a) $A < B$; (b) $A = B$; (c) $A > B$; (d) talen kan ej jämföras.

18. Anna och Gun beräknar volymen av en cylinder. Annas svar är $\ln(\sqrt{2}+1)$, medan Gun får svaret $\ln(\sqrt{2}-1)$. Då gäller

(a) Det kan vara så att båda har rätt svar.
(b) Det är helt säkert så att Anna har fel svar.
(c) Det är helt säkert så att Gun har fel svar.
(d) Inget av (a)-(c) behöver gälla.

19. Anna och Gun beräknar volymen av en cylinder. Annas svar är $\ln(\sqrt{2}+1)$, medan Gun får svaret $-\ln(\sqrt{2}-1)$. Då gäller

(a) Det kan vara så att båda har rätt svar.
(b) Det är helt säkert så att Anna har fel svar.
(c) Det är helt säkert så att Gun har fel svar.
(d) Inget av (a)-(c) behöver gälla.

20. För alla vinklar $\theta$ gäller att $\tan\frac{\theta}{2}$ är lika med

(a) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$; (b) $\pm\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$;
(c) $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$; (d) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{2}{7}+\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}-\frac{11}{14}}\,.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där $p, q$ är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Lös ekvationen $x^2 + x - \dfrac{1}{p} = 0$, där $p \neq 0$ är reell parameter. Ange antalet (tillåtna) heltalsvärden för $p$, för vilka ekvationen saknar reella lösningar.

23. Givet funktionen $f(x) = \cos \dfrac{x}{x^2+1}$, ange $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \sin x + e^{-x}\right) dx$.

25. Lös ekvationen
$$\sin x = \cos 2x\,.$$
Ange summan av de lösningar som ligger i intervallet $[3\pi, 5\pi]$.

26. Lös ekvationen $\sqrt{2a^2 - x^2} = 2 - x$, där $a \geq 0$. Ange det största $a$-värdet, för vilket ekvationen har två olika reella lösningar.

27. Lös olikheten
$$4^x + 2^x \geq 1.$$
Ange olikhetens minsta lösning.

28. Givet är triangeln $ABC$. Den räta linjen $l$ är parallell med sidan $AB$, och $l$ skär sidorna $AC$ och $BC$ i punkterna $P$ och $Q$, respektive. Givet att $AB = 7$ längdenheter (l.e.), $AP = 5$ l.e., och $PC = 3$ l.e., bestäm och ange längden av sträckan $PQ$.

29. Romben $ABCD$ har sidlängd $a$ l.e. ($AB = BC = CD = DA = a$). Vinkeln vid hörnet $B$ i triangeln $ABD$ är $\varphi$. Bestäm de två diagonalernas längder, och ange deras summa.

30. Kvadraterna $ABCD$ och $A_1B_1C_1D_1$ är motstående sidor i en kub, sammanbundna av kanterna $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$. Kubens kantlängd är $a$ l.e. Bestäm och ange avståndet från hörnet $A$ till mittpunkten på kanten $B_1C_1$.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Triangeln $ABC$ har rät vinkel vid $C$, och sidlängder $BC = a$, $CA = b$. Triangeln roteras i sitt plan kring hörnet $A$, till läget $AB'C'$, där hypotenusan $AB'$ går genom det ursprungliga hörnet $C$. Bestäm avståndet från punkten $C'$ till linjen $AB$.