CHALMERS: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

Antagningsprov 2016 - MATEMATIK - SVAR

A.

1b
2d
3b
4c
5d
6a
7d
8d
9d, rätt ges även för 9a
10d, rätt ges även för 10b
11a
12b
13b
14c
15a
16c
17b
18b
19a
20a

B.

21: $\frac{18}{25}$;

22: 1;

23: -1;

24: $\frac{7}{9} - \ln 2 + \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1)$;

25: 5;

26: $-\frac{1}{2}$;

27: $\frac{a+1}{a-1}$;

28: $5 + 3\sqrt{5}$;

29: $\frac{d\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-p}$;

30: $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

C. *Lösning:* För att de två rotuttrycken ska vara definierade krävs att $2x - 1 \geq 0$, och $x \geq 0$, vilket betyder att definitionsmängden ges av alla x sådana att $x \geq \dfrac{1}{2}$. För dessa x är den givna olikheten ekvivalent med olikheten

$$\sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x} + 1.$$

I den är både vänsterledet och högerledet icke-negativa, vilket betyder att vi kan kvadrera och få en olikhet, ekvivalent med den givna (det vill säga, det finns ingen risk att få så kallade falska rötter). Kvadrering ger olikheten

$$2x - 1 \geq x + 2\sqrt{x} + 1,$$

som i sin tur är ekvivalent med

$$x - 2 \geq 2\sqrt{x}.$$

Högerledet här är alltid icke-negativt, vilket betyder att vänsterledet också måste vara det, så att alla lösningar måste uppfylla $x \geq 2$. Notera att sådana x tillhör definitionsmängden, eftersom $2 > \dfrac{1}{2}$. För $x \geq 2$ kan vi återigen kvadrera och vara säkra på att få en olikhet, ekvivalent med den givna

$$x^2 - 4x + 4 \geq 4x,$$

eller

$$x^2 - 8x + 4 \geq 0.$$

Nollställena till andragradsfunktionen i vänsterledet är $4-2\sqrt{3}$ och $4+2\sqrt{3}$. Vänsterledet kan då faktoriseras, och olikheten ovan antar formen

$$(x - (4 - 2\sqrt{3}))(x - (4 + 2\sqrt{3})) \geq 0,$$

som är sann om och endast om båda faktorerna har samma tecken eller någon av dem är lika med 0, vilket inträffar för $x \leq 4 - 2\sqrt{3}$, och för $x \geq 4 + 2\sqrt{3}$. Men, den senaste olikheten var endast ekvivalent med den givna under förutsättningen att $x \geq 2$. Eftersom $4-2\sqrt{3} < 2$, och $4+2\sqrt{3} > 2$, får vi att lösningarna till den givna olikheten är alla x som uppfyller $x \geq 4+2\sqrt{3}$.