Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan

Matematik- och fysikprovet

Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Teknisk fysik

Antagningsprov 2016 - MATEMATIK

2016-05-21, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du kan ringa in dina svar på tesen och ta med dig för att i efterhand jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. För alla reella a gäller att $a^8 - 1$ är lika med

   (a) $(a^2+1)^2(a^2-1)^2$;
   (b) $(a^2-1)(a^2+1)(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$;
   (c) $(a^2+1)(a^2-1)(a^4+a^2+1)$;
   (d) inget av (a)-(c) gäller för alla reella a.

2. Om $x = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$, så är x lika med

   (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) 2; (d) annat svar.

3. Om $x = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, så är x lika med

   (a) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)$; (b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\dfrac{2-\sin 2\alpha}{2}$;
   (c) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^3$; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla α.

4. Ekvationen $x^6 - y^6 = 0$ har samma (reella) lösningar som ekvationen

   (a) $x-y=0$; (b) $x+y=0$; (c) $|x|-|y|=0$ (d) inget av (a)-(c).

5. Olikheten $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ har samma lösningar som olikheten

(a) $x > y$; (b) $x < y$; (c) $xy > 1$; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $a \boxplus b = a \ln b - b \ln a$ för alla positiva reella tal a och b, så gäller att

(a) $a \boxplus b = -(b \boxplus a)$; (b) $1 \boxplus b = b$; (c) $a \boxplus b^2 = 2(a \boxplus b)$; (d) inget av (a)-(c).

7. Ur likheten $(a - x)(b - x) = (1 - ax)(1 - bx)$ följer att

(a) $ab = 1$; (b) $x = \pm 1$; (c) $x = 0$; (d) inget av (a)-(c).

8. Ekvationen $(a - x)(b - x) = (1 - ax)(1 - bx)$ har

(a) ingen lösning; (b) två lösningar;
(c) oändligt många lösningar; (d) kan ej avgöras.

9. Om $ax^2 + bx + c < 0$ för alla reella x, så gäller att

(a) $b^2 - 4ac < 0$; (b) $b^2 - 4ac = 0$; (c) $b^2 - 4ac > 0$; (d) kan ej avgöras.

10. Om $ax^2 + bx + c < 0$ för alla reella x, så gäller att

(a) $a > 0$; (b) $ac > 0$; (c) $c > 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

11. Om $x, y > 0$, så gäller att

(a) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$; (b) $\ln (x + y) = \ln x \cdot \ln y$;
(c) $\ln (xy) = \ln x \cdot \ln y$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

12. Antalet reella lösningar till ekvationen $\ln (\ln(2^{2x} - 2^x + 1)) = 0$ är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

13. Om $\cos \alpha = p$, och $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så gäller att $\tan \alpha$ är lika med

(a) $-\frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$; (b) $\frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$; (c) $\pm\frac{\sqrt{1 - p^2}}{p}$; (d) annat svar.

14. Om $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ så gäller att

(a) $\cos (\pi - \alpha) > 0$; (b) $\cos (\pi - \alpha) = 0$;
(c) $\cos (\pi - \alpha) < 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

15. Om α, β, γ är vinklarna i en triangel och $\alpha > \beta + \gamma$, så gäller att

(a) α är inte spetsig; (b) α är inte trubbig;
(c) kan ej avgöras; (d) det finns ingen sådan triangel.

16. Exakt 52% (det vill säga 52% utan avrundning) bland deltagarna i ett seminarium är män. Antalet deltagare i seminariet är minst

(a) 50; (b) 100; (c) annat antal; (d) kan ej avgöras.

17. Talen a, b, c, d är positiva heltal sådana att $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Då gäller

(a) $\frac{a+b}{c+d} < \frac{c}{d}$; (b) $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$;
(c) $\frac{a+d}{b+c} < \frac{c}{d}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

18. En sats i geometrin lyder: *I en kring en cirkel omskriven fyrhörning är summan av det ena paret motstående sidor lika med summan av det andra paret motstående sidor.* Av satsen följer att

(a) En romb med sidan 4 l.e. är omskriven kring en cirkel.
(b) En rektangel med sidor 3 och 4 l.e. är inte omskriven kring en cirkel.
(c) Varje fyrhörning är omskriven kring en cirkel.
(d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av satsen ovan.

19. Låt a, b, c vara positiva heltal, sådana att a är delbart med b, och b är delbart med c. Då gäller

(a) a är delbart med c; (b) c är delbart med a;
(c) b är inte delbart med a; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

20. En parallellogram har sidlängderna a, b, och diagonallängderna d_1, d_2, där $a \geq b,\ d_1 \geq d_2$. Då gäller

(a) $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;
(b) $d_1 d_2 = 2ab$;
(c) $d_1^2 - d_2^2 = 2(a^2 - b^2)$;
(d) $2(ad_1 + bd_2) = (d_1 + d_2)(a + b)$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{8}+\frac{2}{9}}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Lös ekvationen $(a-1)x^2 - ax + 1 = 0$. Ange det minsta heltalet a sådant att ekvationens alla lösningar är positiva.

23. Givet funktionen $f(x) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$, ange $f'(1)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx$.

25. Lös ekvationen
$$2(x-1) = \sqrt{x^2+6x+9}.$$
Ange ekvationens minsta lösning.

26. Lös ekvationen $4^{(x^2)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$. Ange summan av ekvationens alla lösningar.

27. Givet att $a > 1$, lös olikheten
$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{a}{x+1}.$$
Ange olikhetens största lösning.

28. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C. Höjden från hörnet C delar hypotenusan i delar som är 1 längdenhet och 4 längdenheter långa. Bestäm och ange triangelns omkrets.

29. En rektangel har diagonallängd d längdenheter. Den spetsiga vinkeln mellan diagonalerna är α. Givet att $\cos\alpha = p$, bestäm och ange längden av rektangelns kortare sida som en funktion av p.

30. Givet en rätvinklig triangel med katetlängder a och b längdenheter, bestäm och ange längden av bisektrisen till den räta vinkeln.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\sqrt{2x-1} - 1 \geq \sqrt{x}.$$