

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Elektroteknik,
Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Simuleringsteknik
och virtuell design, Teknisk fysik

Antagningsprov 2015 - MATEMATIK - SVAR

A.

1b

2a

3a

4d

5d

6a

7b

8c

9c

10b

11d

12d

13a

14b

15a

16c

17d

18b

19c

20b

B.

21: $-\frac{27}{7}$;

22: 2;

23: $-\frac{8e^{\frac{5}{3}}}{9}$;

24: $\frac{1}{36} \left(5 + \frac{\pi^3}{36} \right)$;

25: $\frac{1}{2}$;

26: $\ln 5$;

27: det finns inget minsta tal med den egenskapen;

28: $\frac{a}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{7})$;

29: $2(a^2 + ab + b^2)$;

30: $\frac{74}{7}$.

C. *Lösning*: Vi använder trigonometriska formler för att skriva om högerledet:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 2x + \sin 3x = \\ &= 2 \sin x \cos x + \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ &= 2 \sin x \cos x(1 + \cos x) + \cos 2x \sin x = \\ &= \sin x(2 \cos x + 2 \cos^2 x + \cos 2x) = \\ &= \sin x(2 \cos x + 2 \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1).\end{aligned}$$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med

$$\sin x(4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2) = 2 \sin x(2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 0.$$

En produkt är lika med noll om och endast om någon av faktorerna är lika med noll. Vi behöver alltså lösa ekvationerna

$$\sin x = 0 \quad \text{och} \quad 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Deras lösningar kommer tillsammans att ge alla lösningar till den givna ekvationen. Ekvationen $\sin x = 0$ har lösningarna $x'_k = k\pi$, där k är ett heltal. I den andra ekvationen sätter vi $t = \cos x$ och får andragradsekvationen

$$2t^2 + t - 1 = (2t - 1)(t + 1) = 0,$$

som har lösningarna $t = -1$ och $t = \frac{1}{2}$. Slutligen behöver vi alltså lösa $\cos x = -1$, vars lösningar är $x_l = (2l + 1)\pi$, och $\cos x = \frac{1}{2}$, med lösningar $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, där l och k är heltal. Lösningarna $x_l = (2l + 1)\pi$, l heltal, ingår i lösningsskaran $x'_k = k\pi$, där k är ett heltal. Alla lösningar ges slutligen av

$$x'_k = k\pi, \quad x''_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x'''_k = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

där k varierar över mängden av alla heltal.