Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan

Matematik- och fysikprovet

Chalmers: Arkitektur och teknik, Elektroteknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Simuleringsteknik och virtuell design, Teknisk fysik

Antagningsprov 2015 - MATEMATIK

2015-05-09, kl. 9.00 – 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du kan ringa in dina svar på tesen och ta med dig för att i efterhand jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. För alla positiva a, b, och $x = \dfrac{\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \sqrt{b}}{\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{a}}$, gäller att x är lika med

   (a) $-\sqrt{ab}$; (b) $-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;
   (c) -1; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla $a, b > 0$.

2. Om $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$, så är x lika med

   (a) $2\sqrt{2}$; (b) $2\sqrt{3}$; (c) 2; (d) annat svar.

3. Talet $3^{-\frac{3}{4}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$ är lika med

   (a) $3\sqrt[4]{3}$; (b) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; (c) $3^5\sqrt[4]{3}$; (d) annat svar.

4. Olikheten $(x^3 - y^3)(x^2 - y^2) \geq 0$ har samma lösningar som olikheten

   (a) $x - y \geq 0$; (b) $|x| - |y| \geq 0$; (c) $x + y \geq 0$ (d) inget av (a)-(c).

5. Olikheten $(2x - 1)^2 > x^2$ har samma lösningar som olikheten

   (a) $x - 1 > 0$; (b) $-x > -1$; (c) $3x - 1 > 0$; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $m \boxplus n = m(n-1) - n(m+1)$ för alla heltal m och n, så gäller att $(2 \boxplus (-2)) \boxplus (-1)$ är lika med

   (a) 1; (b) 0; (c) 5; (d) inget av (a)-(c).

7. Om din inkomst ökar med 10 % och priserna förblir oförändrade, så har din köpkraft ökat med

   (a) mindre än 10 %; (b) 10 %; (c) mer än 10 %; (d) kan ej avgöras.

8. Om priserna sjunker med 10 % och din inkomst förblir oförändrad, så har din köpkraft ökat med

   (a) mindre än 10 %; (b) 10 %; (c) mer än 10 %; (d) kan ej avgöras.

9. Om funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ har minsta värde i mängden av alla reella tal, så gäller att

   (a) $a < 0$; (b) $a = 0$; (c) $a > 0$; (d) kan ej avgöras.

10. Antalet reella lösningar till ekvationen $9^x - 6^x - 2^{2x+1} = 0$ är

    (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

11. Om $a, b > 0$, så gäller att

    (a) $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$; (b) $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$;
    (c) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

12. Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\ln(\ln(x^2-1))}$ har en definitionsmängd som består av alla reella x sådana att

    (a) $|x| > 0$; (b) $|x| > 1$;
    (c) $|x| > \sqrt{2}$; (d) inget av (a)-(c).

13. Om $\tan\alpha = p$, och $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så gäller att $\sin\alpha$ är lika med

(a) $\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}$; (b) $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; (c) $\pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; (d) annat svar.

14. Om $\sin\alpha = \frac{1}{7}$, och $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ så gäller att $\cot\alpha$ är lika med

(a) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$; (b) $-4\sqrt{3}$; (c) $\pm\frac{1}{4\sqrt{3}}$; (d) annat svar.

15. Om α är vinkel i en triangel och $\sin 2\alpha \leq 0$, så gäller att

(a) α är inte spetsig; (b) α är inte trubbig;
(c) kan ej avgöras; (d) det finns ingen sådan vinkel.

16. Antalet lösningar till ekvationen $|\cos x| = |\sin x|$ sådana att $0 \leq x \leq 2\pi$ är

(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) annat svar.

17. En rätvinklig triangel har omkrets 20 längdenheter och area 25 areaenheter. Hypotenusans längd är

(a) $7,5$ l.e.; (b) annat tal;
(c) kan ej avgöras; (d) det finns ingen sådan triangel.

18. Den kortaste höjden i en triangel med sidlängder $5, 12$ och 13 längdenheter har längden (i längdenheter)

(a) $\frac{30}{13}$; (b) $\frac{60}{13}$; (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.

19. Vi betraktar relationerna parallellitet och ortogonalitet mellan olika räta linjer i ett plan, och använder följande beteckningar: $l \parallel m$ betecknar l paralell med m; $l \perp m$ betecknar l vinkelrät (ortogonal) mot m. Då gäller

(a) Om $l \parallel m$ och $m \parallel n$, så $l \parallel n$. (b) Om $l \perp m$ och $m \perp n$, så $l \parallel n$.
(c) Om $l \parallel m$ och $m \perp n$, så $l \perp n$. (d) Inget av (a)-(c) gäller generellt.

20. För reella tal α och positiva heltal k definieras de så kallade *binomialkoefficienterna* som $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots(k-1)\cdot k}$. För binomialkoefficienterna gäller *inte* att

(a) $\binom{\alpha+1}{k+1} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1}$ för α reellt tal och k positivt heltal;

(b) $\binom{\alpha}{k}$ är alltid ett heltal;

(c) Binomialkoefficienterna kan vara såväl positiva som negativa.

(d) Om α är ett positivt heltal, så är $\binom{\alpha}{k} = 0$ för $k > \alpha$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{7}}{\frac{4}{9}-\frac{7}{12}}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange det största heltal a sådant att ekvationen $3x^2 + x + a^2 - 7 = 0$ har minst en reell lösning.

23. Givet funktionen $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$, ange $f'(2)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{x^2}{2}\right) dx.$

25. Lös olikheten
$$\sqrt{2-\frac{1}{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Ange olikhetens minsta lösning.

26. Lös ekvationen
$$2\ln(e^x - 1) = \ln 2 + \ln(e^x + 3).$$
Ange ekvationens största lösning.

27. Ange det minsta reella tal a sådant att ekvationen
$$x|x-a| = 3$$
har exakt en reell lösning.

28. Romben $ABCD$ har sidlängd a och vinkel 60° vid hörnet A. Om M är mittpunkten på sidan AB, bestäm längderna av sträckorna MC och MD. Ange summan av de två längderna.

29. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C och katetlängder a och b. Kvadrater $APQB, BRSC, CTUA$ är konstruerade på sidorna AB, BC, CA utanför triangeln. Bestäm och ange arean av sexhörningen $PQRSTU$.

30. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C. Höjden CD har längden 5 längdenheter (D ligger på sidan AB), och sträckan AD har längden 7 längdenheter. Bestäm och ange hypotenusans längd.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös ekvationen

$$\sin x = \sin 2x + \sin 3x.$$