Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan

Matematik- och fysikprovet

Chalmers: Arkitektur och teknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Simuleringsteknik och virtuell design, Teknisk fysik

Antagningsprov 2014 - MATEMATIK

2014-05-10, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du kan ringa in dina svar på tesen och ta med dig för att i efterhand jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. För alla a, och $x = \dfrac{a^{12}-1}{a^2+1}$, gäller att x är lika med

   (a) $a^{10} - a^8 + a^6 - a^4 + a^2 - 1$; (b) $a^{10} - a^8 + 2a^6 - 2a^4 + a^2 - 1$;
   (c) $a^{10} - a^8 - 2a^6 + 2a^4 + a^2 - 1$; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla a.

2. Om $x = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, så är x lika med

   (a) $\dfrac{6+\sqrt{35}}{6}$; (b) $\dfrac{6-\sqrt{35}}{12}$; (c) $\dfrac{6-\sqrt{35}}{6}$; (d) annat svar.

3. Talet $11^{-\frac{5}{3}}$ är lika med

   (a) $\sqrt[3]{11^5}$; (b) $\sqrt[5]{11^3}$; (c) $\sqrt[3]{(-11)^5}$; (d) annat svar.

4. Olikheten $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 2$ är uppfylld för alla x sådana att

   (a) $1 < x < \infty$; (b) $-\infty < x < -1$; (c) alla reella x (d) annat svar.

5. Alla lösningar till olikheten $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > 0$ ges av

   (a) alla reella x; (b) alla $x > 0$; (c) alla $x < -1$; (d) annat svar.

6. Om $x \boxplus y = \dfrac{(x+1)\,y}{x\,(y+1)}$ för alla positiva tal x och y, så gäller för alla x, y sådana att $x > y > 0$ att

   (a) $x \boxplus y = y \boxplus x$; (b) $x \boxplus y \geq 1$; (c) $x \boxplus y \leq 1$; (d) inget av (a)-(c).

7. Grafen till funktionen $f(x) = 3x^2 + ax - 2$, där a är ett reellt tal, är en parabel som

   (a) skär x-axeln i två olika punkter; (b) tangerar x-axeln i en punkt;
   (c) varken skär eller tangerar x-axeln; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

8. Grafen till funktionen $f(x) = 3x^2 - 2x + a$, där a är ett reellt tal, är en parabel som

   (a) skär x-axeln i två olika punkter; (b) tangerar x-axeln i en punkt;
   (c) varken skär eller tangerar x-axeln; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

9. Om $a > 1$, så har olikheten $a^{x^3} > \left(\dfrac{1}{a}\right)^{x^2-1}$ samma lösningar som olikheten

   (a) $x^3 - x^2 + 1 > 0$; (b) $x^3 + x^2 - 1 > 0$;
   (c) $x^3 - x^2 - 1 > 0$; (d) ingen av (a)-(c).

10. Om $a > 0$ och olikheterna $a^{x^3} > \left(\dfrac{1}{a}\right)^{x+1}$ och $x^3 + x + 1 < 0$ har samma lösningar så kan man dra slutsatsen att

    (a) $a > 1$; (b) $a = 1$; (c) $a < 1$; (d) inget av (a)-(c).

11. Om $a, b > 0$, så gäller att

    (a) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$; (b) $\ln (ab) = \ln a \cdot \ln b$;
    (c) $\ln (a+b) = \ln a \cdot \ln b$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

12. Om $a > 0$, så gäller att $\ln \dfrac{a\sqrt{a^2+a+1}}{a+1}$ är lika med

    (a) $\dfrac{\ln a \cdot \ln (a^2+a+1)}{2\ln (a+1)}$; (b) $\dfrac{\ln a \cdot \sqrt{\ln (a^2+a+1)}}{\ln (a+1)}$;
    (c) $\dfrac{2\ln a + \ln (a^2+a+1)}{2\ln (a+1)}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

13. Om $\sin\alpha = p$, och $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{-p}{\sqrt{1-p^2}}$; (b) $\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (c) $\pm\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (d) annat svar.

14. Om $\tan\alpha = -\dfrac{5}{12}$, och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ så gäller att $\sin\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{5}{13}$; (b) $-\dfrac{5}{13}$; (c) $\pm\dfrac{5}{13}$; (d) annat svar.

15. Om α är vinkel i en triangel och $\tan\alpha \leq 0$, så gäller att

(a) α är spetsig; (b) α är rät; (c) α är trubbig; (d) kan ej avgöras.

16. Antalet (reella) lösningar till ekvationen $|x^2 - 6x + 3| = 6$, är

(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) annat svar.

17. Om diagonalerna i en fyrhörning är vinkelräta mot varandra och är 4 längdenheter respektive 5 längdenheter långa, så är fyrhörningens area

(a) 20 a.e.; (b) 10 a.e.; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

18. I en triangel med sidlängderna 5, 7 och 9 längdenheter är den största vinkeln

(a) spetsig; (b) rät; (c) trubbig; (d) det finns ingen sådan triangel.

19. En sats i talteori lyder: *Om a, b är positiva heltal, och p är ett primtal som delar produkten ab, så gäller att p delar a eller p delar b.* Av satsen följer att

(a) Om p delar ab och p delar a, så delar p inte b.

(b) Om p delar a^2b, så gäller att p delar a eller p delar b.

(c) Om p delar a och p delar b, så delar p produkten ab.

(d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av satsen.

20. En fyrhörning kallas *inskriven* om det finns en cirkel som går genom dess fyra hörn. Om fyrhörningen $ABCD$ (med sidor AB, BC, CD, DA och diagonaler AC, BD) är inskriven, så gäller att

(a) $|AB| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| - |CD| \cdot |DA|$;

(b) $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| - |BC| \cdot |DA|$;

(c) $|AB| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| + |CD| \cdot |DA|$;

(d) $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{3}{14}-\frac{5}{12}}{\frac{1}{6}+\frac{2}{15}}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange det största heltal a sådant att ekvationen $2x^2 + ax + a^2 - 1 = 0$ har en negativ och en positiv lösning.

23. Givet funktionen $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, ange $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_1^2 \left(3x^5 + \frac{2}{x^2} + e^{-2x}\right) dx$.

25. Ange antalet lösningar till ekvationen $\tan x = \cos x$ som uppfyller olikheterna $-\pi < x < \pi$.

26. Lös ekvationen
$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 1 - \sqrt{x+5}\,.$$
Ange den största (reella) lösningen.

27. Lös ekvationen
$$\log_x (3 - x) = \log_{x^2} (8 - 3x - x^2).$$
Ange den största (reella) lösningen.

28. Givet är parallellogrammen $ABCD$, där $|AB| = 2$ längdenheter, $|AD| = \sqrt{3}$ längdenheter, och vinkeln vid hörnet A är $45°$. Bestäm och ange längden av parallellogrammens längsta diagonal.

29. Givet en rektangel med area 3 areaenheter och vinkel mellan diagonalerna $30°$, bestäm och ange rektangelns omkrets.

30. Punkten M är en inre punkt för den liksidiga triangeln ABC. Punkterna A_1, B_1, C_1 ligger på sidorna BC, CA, AB, respektive, och är sådana att MA_1 är vinkelrät mot BC, MB_1 är vinkelrät mot CA, och MC_1 är vinkelrät mot AB. Om $|MA_1| = 3$, $|MB_1| = 4$, $|MC_1| = 5$ (alla angivna i längdenheter), bestäm och ange triangelns sidlängd.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$\frac{x-1}{x^2+4x+4} \leq \frac{1}{x-1}\,.$$