CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN

Matematik- och fysikprovet

# CHALMERS: Arkitektur och teknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

# KTH: Elektroteknik, Farkostteknik, Simuleringsteknik och virtuell design, Teknisk fysik

# Antagningsprov 2013 - MATEMATIK

2013-05-18, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in. Du kan ringa in dina svar på tesen och ta med dig för att i efterhand jämföra med facit.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. För alla $a \neq 0$, och $x = \dfrac{\sqrt{a^2} - \sqrt{(-a)^2}}{2a}$, gäller att

   (a) $x = -1$; (b) $x = 0$; (c) $x = 1$; (d) inget av (a)-(c) gäller för alla $a \neq 0$.

2. Om $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, och $x = \dfrac{\left(\sqrt{ab} - \sqrt{bc}\right)^2}{abc}$, så är $x$ lika med

   (a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$; (b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{\sqrt{ac}}$; (c) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{\sqrt{ac}}$; (d) annat svar.

3. Om $a < 0$, och $x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^2}}}$, så gäller att

   (a) $x = \sqrt[3]{a}$; (b) $x = \sqrt[4]{a}$; (c) $x = \sqrt[4]{-a}$; (d) annat svar.

4. Om $a < 0$, och $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3}}}$, så gäller att

   (a) $x = \sqrt[6]{a}$; (b) $x = \sqrt[9]{a}$; (c) $x = \sqrt[9]{-a}$; (d) annat svar.

5. Alla lösningar till olikheten $1 + \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x}$ ges av

   (a) alla reella $x$; (b) alla $x > 1$; (c) alla $x < 0$; (d) annat svar.

6. Om $m \boxplus n = m^n$ för alla positiva heltal $m$ och $n$, så gäller att $(x \boxplus y) \boxplus z$ för alla positiva heltal $x, y$ och $z$ är lika med

   (a) $(y \boxplus x) \boxplus z$; (b) $(x \boxplus z) \boxplus y$; (c) $x \boxplus (y \boxplus z)$; (d) inget av (a)-(c).

7. Talen $a, b$ och $c$ är reella, och sådana att $ac < 0$. Ekvationen $ax^2+bx+c = 0$ har då

   (a) två olika reella rötter; (b) en reell dubbelrot;
   (c) två komplexa icke-reella rötter; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

8. Talen $a, b$ och $c$ är reella, och sådana att $ac > 0$. Ekvationen $ax^2+bx+c = 0$ har då

   (a) två olika reella rötter; (b) en reell dubbelrot;
   (c) två komplexa icke-reella rötter; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

9. Antalet lösningar till ekvationen $|2x + 5| - x = 0$ är

   (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

10. Om $a, b > 0$, så gäller att

    (a) $\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$; (b) $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$;
    (c) $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

11. Om $a > 0$, $x > y$, och $a^x > a^y$, så kan man dra slutsatsen att

    (a) $a > 1$; (b) $a \geq e$; (c) $|x| > |y|$; (d) inget av (a)-(c).

12. Om $f(t) = e^t$, och $g(t) = t^2$, så har ekvationen $f(g(x)) + g(f(x)) - 1 = 0$

    (a) två reella lösningar; (b) en reell lösning;
    (c) ingen reell lösning; (d) annat svar.

13. Om $\cos\alpha = p$, och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{|p|}$; (c) $\pm\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$; (d) annat svar.

14. Om $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$, och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ så gäller att $\cos\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{3}{5}$; (b) $-\dfrac{3}{5}$; (c) $\pm\dfrac{4}{5}$; (d) annat svar.

15. Om $\alpha$ är vinkel i en triangel och $\sin\alpha \geq 0$, så kan man dra slutsatsen att

(a) $\alpha$ är spetsig; (b) $\alpha$ är rät; (c) $\alpha$ är trubbig; (d) inget av (a)-(c).

16. Antalet lösningar till ekvationen $4^{\sin^2 x} - 2^{\cos 2x} + 1 = 0$, för $0 < x \leq \pi$, är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

**OBS!** Med ***vinkel*** menas i de två uppgifterna nedan geometrisk vinkel, det vill säga vinkel större än 0 och mindre än 180°.

17. Punkterna $A, B, C$ ligger på en cirkel med medelpunkt $O$. Om vinkeln $ABC$ är lika med 60°, så är vinkeln $AOC$ lika med

(a) 30°; (b) 120°; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

18. Punkterna $A, B, C$ ligger på en cirkel med medelpunkt $O$. Om vinkeln $AOC$ är lika med 60°, så är vinkeln $ABC$ lika med

(a) 30°; (b) 120°; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

19. En viktig sats i analysen lyder: *Om en funktion är deriverbar i en punkt, så är funktionen kontinuerlig i denna punkt.* Av satsen följer att

(a) Om $f$ är kontinuerlig i $a$, så är $f$ deriverbar i $a$.
(b) Om $f$ inte är kontinuerlig i $a$, så är $f$ inte deriverbar i $a$.
(c) Om $f$ är deriverbar i $a$, så är $f'$ kontinuerlig i $a$.
(d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av satsen.

20. Vinklarna $\alpha, \beta$ och $\gamma$ är vinklar i en triangel. Då gäller att

(a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$;
(b) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;
(c) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2}$;
(d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{14}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där $p, q$ är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange det största heltal $a$ sådant att ekvationen $3x^2 + 2ax + 7 = 0$ har två positiva lösningar.

23. Givet funktionen $f(x) = \ln \dfrac{3x^2 - x}{x^2 + 1}$, ange $f'(2)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \left( x^3 + \frac{1}{x} + \sin 4x \right) dx.$

25. Lös olikheten $e^x + 2e^{-x} < 3$. Ange antalet heltalslösningar.

26. För $x > 0$, lös ekvationen

$$x^{1+\sqrt{1+(2-x)\sqrt{x^2+4x+3}}} = x^x.$$

Ange den minsta (reella) lösningen.

27. Ange det största reella tal $p$ för vilket ekvationerna $|3x - 5| = |7 - 3x|$ och $\dfrac{4x+p}{p^2x+2} = 1$ har samma lösningar.

28. En regelbunden åttahörning är inskriven i en cirkel med radie $R$. Ange längden av åttahörningens kortaste diagonal.

29. Givet är triangeln $ABC$. Vinkeln vid $C$ är $60^\circ$, och sidan $AC$ har längden 2 längdenheter. Bestäm och ange den minsta längden sidan $AB$ kan ha.

30. Givet en romb med sidlängd $a$ och spetsig vinkel $45^\circ$, bestäm de två diagonalernas längd. Ange summan av de två diagonallängderna.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Bestäm alla $p$ och $q$ sådana att funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ har sitt minsta värde i $x_0 = 2$, samt har två reella nollställen $x_1, x_2$ som uppfyller $x_1^2 = \dfrac{18}{x_2^2}$.