CHALMERS: Arkitektur och teknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Farkostteknik, Simuleringsteknik och virtuell design, Teknisk fysik

Antagningsprov 2012 - MATEMATIK - SVAR

A.

1b
2b
3a
4c
5d
6c
7d
8d
9b
10d
11d
12b
13a
14b
15b
16c
17d
18c
19b
20d

B.

21: $\frac{56}{43}$
22: -1
23: $4\sqrt{2}\sin 3$
24: $\frac{\pi^3}{1536} + \frac{7}{12} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3\pi}{8}}$
25: $2 + \sqrt{7}$
26: 2
27: $\frac{\pi}{3}$
28: $a\sqrt{3}$
29: $\frac{\sqrt{3}}{3}$
30: $\frac{c}{1+\tan\varphi}$

C. *Lösning I:* Låt $ABCD$ vara den givna parallellogrammen, med $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |DA| = b$, $|BD| = b$, och $|AC| = 2b$. Dra DP och CQ vinkelrätt mot linjen AB, där P och Q ligger på linjen AB. Triangeln ABD är likbent och DP är höjd mot basen i den, vilket betyder att $|AP| = |BP| = \frac{a}{2}$. Trianglarna APD och BQC är kongruenta (likformiga med proportionalitetskonstant 1), eftersom de har lika vinklar och ett par motsvarande sidor lika (hypotenusorna). Det följer att $|BQ| = |AP| = \frac{a}{2}$, och $|DP| = |CQ|$. Pythagoras sats för de två rätvinkliga trianglarna BQC och AQC ger nu

$$b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = |CQ|^2 = (2b)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2,$$

så att $2a^2 = 3b^2$, och $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lösning II: Vi använder samma beteckningar som ovan. Inför även beteckningarna $\angle ADB = \varphi, \angle DAB = \alpha$. Triangeln ABD är likbent, alltså är dess basvinklar lika, $\angle ABD = \angle DAB = \alpha$. Dessutom är $\angle BDC = \angle ABD$, som alternatvinklar vid parallella linjer. Vi har $\varphi = 180° - 2\alpha$. Cosinussatsen för trianglarna ABD och ACD ger

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha; \\ 4b^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \varphi) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha, \end{aligned}$$

så att $2ab\cos\alpha = a^2 = 3b^2 - a^2$, och vi får igen $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.