Chalmers tekniska högskola
Kungliga tekniska högskolan

Matematik- och fysikprovet

Chalmers: Arkitektur och teknik, Kemiteknik med fysik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Farkostteknik, Simuleringsteknik och virtuell design, Teknisk fysik

Antagningsprov 2012 - MATEMATIK

2012-05-12, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad. Tesen med uppgifterna lämnas *inte* in.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{5}$, och $x = \dfrac{ab - c}{ab + c}$, så gäller att

   (a) $x = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$; (b) $x = 11 - 2\sqrt{30}$; (c) $x = 11$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, och $x = \dfrac{\sqrt[3]{ab\sqrt{c}} - a\sqrt[4]{b^2c}}{\sqrt[6]{a^3b^2c}}$, så är x lika med

   (a) $\sqrt[6]{\dfrac{1 - a^4b\sqrt{c}}{a}}$; (b) $\dfrac{1 - \sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{b^2c}}}{\sqrt[6]{a}}$; (c) $\dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{1 + a^4b\sqrt{c}}}$; (d) annat svar.

3. Om a är ett reellt tal och $f(x) = \sqrt{(x+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2}$, så gäller att $f(0)$ är lika med

   (a) 0; (b) $2a$; (c) $-2a$; (d) annat svar.

4. Om b är ett reellt tal, $a = \sqrt{b^2}$, och $x > a$, så gäller att $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}$ är lika med

   (a) $\sqrt{x+b} - \sqrt{x-b}$; (b) $2\sqrt{a}$; (c) $|\sqrt{x+b} - \sqrt{x-b}|$; (d) annat svar.

5. Olikheten $\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2 > 0$ har samma lösningar som olikheten

   (a) $(2x-1)^2 > 0$; (b) $2x-1 \neq 0$; (c) $2x-1 > 0$; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $a \boxplus b = a\sqrt{b^2+1} - b\sqrt{a^2+1}$ för alla reella tal a och b, så gäller att $x \boxplus y$ för alla reella tal x och y är lika med

   (a) $y \boxplus x$; (b) $(-x) \boxplus (-y)$; (c) $(-y) \boxplus (-x)$; (d) inget av (a)-(c).

7. Talen b och c är reella. Om ekvationen $x^2 + bx + c = 0$ har två reella lösningar x_1, x_2, sådana att $x_1 = x_2^2 > 0$, så gäller att

   (a) $b^2 > 4c$; (b) $b > 0$; (c) $c > 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

8. Talet p är reellt. Om ekvationen $x^2 + px + p = 0$ har två olika reella lösningar, så gäller att

   (a) $p > 4$; (b) $p = 4$; (c) $p < 4$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

9. Momsen på matvaror är $12,5\%$. Om en vara av den typen kostar 100 kr inkl. moms, så är momsens andel av totalpriset

   (a) $\frac{1}{8}$; (b) $\frac{1}{9}$; (c) $\frac{1}{10}$; (d) annat svar.

10. Om $a > b > 1$, så gäller att

    (a) $\ln(a^2+b) = 2\ln a + \ln b$; (b) $\ln(a^2-b) = \frac{2\ln a}{\ln b}$;

    (c) $\ln(a^2-b) = 2\ln\frac{a}{b}$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

11. Om $x > 0$, och $x^a = x^b$, så kan man dra slutsatsen att

    (a) $a = b$; (b) $|a| = |b|$; (c) $x = 1$; (d) inget av (a)-(c).

12. Ekvationen $e^{6x} - e^{3x} - 6 = 0$ har

    (a) två reella lösningar; (b) en reell lösning;

    (c) ingen reell lösning; (d) annat svar.

13. Om $\sin\alpha = p$, och $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

    (a) $\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (b) $\frac{|p|}{\sqrt{1-p^2}}$; (c) $\pm\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (d) annat svar.

14. Om $t = \tan\frac{x}{2}$, så är $\frac{2t}{1+t^2}$ lika med

(a) $\cos x$; (b) $\sin x$; (c) $\tan x$; (d) inget av (a)-(c).

15. Om α och β är vinklar i en triangel och $\alpha > \beta$, så gäller

(a) $\cos\alpha > \cos\beta$; (b) $\sin\alpha > \sin\beta$;
(c) $\tan\alpha > \tan\beta$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

16. Antalet lösningar till ekvationen $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$, för $0 \le x \le \pi$, är

(a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) annat svar.

17. Talet a är positivt, medan b är icke-negativt. Givet att exakt ett av de fyra påståendena nedan är sant, avgör vilket och markera det

(a) $b = 0$; (b) $b > a$; (c) $b < a$; (d) $b > 0$.

18. Ur Euklides algoritm följer satsen: *För varje två positiva heltal m, n som är relativt prima (d.v.s. som har största gemensamma delare lika med 1) finns heltal a, b sådana att $am + bn = 1$.* Av satsen följer att

(a) Det finns heltal a, b sådana att $a \cdot 51 + b \cdot 72 = 1$.
(b) Det finns heltal a, b sådana att $a \cdot 13 + b \cdot 91 = 1$.
(c) Det finns heltal a, b sådana att $a \cdot 32 + b \cdot 81 = 1$.
(d) Man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

19. Om m, n är positiva heltal och p är ett primtal så är det *inte* sant att

(a) Om p delar både m och n, så är produkten mn delbar med p^2.
(b) Om produkten mn är delbar med p^2, så delar p både m och n.
(c) Om p delar ett av talen m, n, så är deras produkt mn delbar med p.
(d) Om p delar produkten mn, så delar p minst ett av talen m, n.

20. Triangeln ABC har spetsiga vinklar vid A och B. Beteckna $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$. Punkten P ligger på sidan AB. Då gäller

(a) $|CP|^2 = a^2 \cdot |AP| + b^2 \cdot |BP| - |AP| \cdot |BP| \cdot c$;
(b) $|CP|^2 = a^2 \cdot |AP| + b^2 \cdot |BP| - |AP| \cdot (c + |AP|) \cdot c$;
(c) $|CP|^2 = \frac{a^2}{c} \cdot |AP| + \frac{b^2}{c} \cdot (c + |AP|) - |AP| \cdot |BP|$;
(d) $|CP|^2 = \frac{a^2}{c} \cdot |AP| + \frac{b^2}{c} \cdot (c - |AP|) - |AP| \cdot |BP|$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{7}{8}-\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{8}\right)}{\frac{5}{6}+\frac{1}{16}}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange det största heltal a sådant att ekvationen $5x^2+15x+11a=0$ har en positiv lösning.

23. Givet funktionen $f(x)=\cos\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, ange $f'(\sqrt{2})$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(x^2+e^{-3x}-\cos 4x+\sin 2x\right)\,dx.$

25. Lös ekvationen $\ln\dfrac{x^2+3x+2}{x-1}=\ln(2x+1)$. Ange den minsta (reella) lösningen.

26. Lös olikheten $\dfrac{2x+3}{3x^2-2x-5}<0$. Ange antalet icke-negativa heltalslösningar.

27. Funktionen f är definierad för alla x sådana att $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, och har andraderivata $f''(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{3}{\sin^2 x}$. Ange summan av alla tal mellan 0 och $\dfrac{\pi}{2}$, i vilka f har lokala minima, givet att $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$.

28. En regelbunden sexhörning har sidlängd a. Ange avståndet mellan två av dess parallella sidor.

29. Givet en kub, ange sinus för vinkeln mellan en rymddiagonal och en sidodiagonal som ligger i ett plan med rymddiagonalen. (Kubens sidor är kvadrater.)

30. Triangeln ABC är likbent med rät vinkel vid hörnet C. Beteckna $|AB|=c$. Punkten P ligger på sidan AB ($P\neq A,B$) och vinkeln $\angle PCB$ är lika med φ. Ange $|AP|$ i termer av c och $\tan\varphi$.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

I en parallellogram med sidlängder a och b, $0 < b < a$, har de två diagonalerna längderna b och $2b$. Beräkna förhållandet $\dfrac{a}{b}$.