CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN

Matematik- och fysikprovet

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

KTH: Farkostteknik, Teknisk fysik

Antagningsprov 2011 - MATEMATIK

2011-05-14, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $U = \dfrac{4}{4-x^2}$, så gäller för alla reella $x \neq \pm 2$ att

   (a) $U = -U$; (b) $U = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$; (c) $U > 1$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om x, y, z är reella tal sådana att $x = \sqrt{y^4}$, $z = \sqrt{y^2}$, och $U = yz^2 - xz$, så gäller för alla reella y att

   (a) $U = 0$; (b) $U = \pm 2y^3$; (c) $y^3 - |y|^3$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $a + b = 1$, och $x = (a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)$, så gäller

   (a) $x = a^2b^2$; (b) $x = a^2b^2 + 3$; (c) $x = (ab - 1)^2$; (d) inget av (a)-(c).

4. Antalet heltalslösningar till olikheten $2x^2 - 14x + 13 \leq 0$ är

   (a) 0; (b) 4; (c) 6; (d) inget av (a)-(c).

5. Antalet heltalslösningar till olikheten $2x^2 - 15x + 13 \leq 0$ är

   (a) 0; (b) 4; (c) 6; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $m \boxplus n = m(n-1)$ för alla heltal m och n, så gäller att $n \boxplus m$ för alla heltal m och n är lika med

   (a) $m \boxplus n$; (b) $(m{+}1)\boxplus(n{-}1)$; (c) $(m{-}1)\boxplus(n{+}1)$; (d) inget av (a)-(c).

7. Talen b och c är reella, $c \neq 0$. Om ekvationen $x^2 + bx + c = 0$ har två reella lösningar med samma tecken, så gäller att

   (a) $b > 0$; (b) $c > 0$; (c) $bc > 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

8. Talen b och c är reella, $c \neq 0$. Om ekvationen $x^2 + bx + c = 0$ har två reella lösningar med olika tecken, så gäller att

   (a) $b > 0$; (b) $c > 0$; (c) $bc > 0$; (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

9. Alla positiva reella lösningar till ekvationen $x^{x^2-3x} = x^2$ ges av

   (a) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$; (b) $x = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$;
   (c) ekvationen har inga positiva reella lösningar; (d) inget av (a)-(c).

10. För alla reella tal $x \neq 0$ gäller att

    (a) $\ln|x| + \dfrac{1}{\ln|x|} = 0$; (b) $\ln\left|\dfrac{1}{x}\right| + \ln|x| = 0$;
    (c) $\ln x^2 + 2\ln(-x) = 0$; (d) inget av (a)-(c).

11. Om det reella talet a uppfyller $a = \ln(\sqrt{2}-1) - \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, så gäller att

    (a) $a < 0$; (b) $a = 0$; (c) $a > 0$; (d) det finns inget sådant reellt tal.

12. Om α är vinkel i en triangel och $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, så gäller att $\cos\alpha$ är lika med

    (a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

13. Om $\sin\alpha = p$, och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

    (a) $\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (b) $-\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (c) $\pm\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (d) annat svar.

14. Om $t = \tan\dfrac{x}{2}$, så kan $\cos x$ framställas som

$$\text{(a) } \frac{1+t^2}{1-t^2}; \qquad \text{(b) } \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \text{(c) } \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad \text{(d) } \frac{2t}{1-t^2}.$$

15. Antalet (reella) lösningar till ekvationen $x - 2 = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ är

    (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

16. Antalet reella lösningar till ekvationen $x - 2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ är

    (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

17. Höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel har längden 4 cm, medan de båda kateterna har längderna 3 cm och 8 cm. Då gäller att hypotenusans längd är

    (a) 6 cm; (b) 12 cm; (c) annat tal; (d) det finns ingen sådan triangel.

18. "Varje gång jag har besökt USA har jag också besökt Kanada." Av detta kan man dra slutsatsen att
    (a) Jag har varit i USA och Kanada lika många gånger.
    (b) Om jag inte har varit i Kanada så har jag heller inte varit i USA.
    (c) Om jag inte har varit i USA så har jag heller inte varit i Kanada.
    (d) Man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

19. Pythagoras sats lyder: *I en rätvinklig triangel är summan av kvadraterna på kateterna lika med kvadraten på hypotenusan.* Av Pythagoras sats följer att
    (a) Givet tre positiva tal a, b, c finns en rätvinklig triangel med just dessa tre tal som sidlängder.
    (b) En triangel med sidlängder $3, 4, 5$ är rätvinklig.
    (c) Det finns ingen rätvinklig triangel med sidlängder $5, 10, 11$.
    (d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av Pythagoras sats.

20. Givet den rätvinkliga triangeln ABC med rät vinkel vid C och sidlängder $|AB| = c,\ |BC| = a,\ |CA| = b$, låt r vara den inskrivna cirkelns radie. Då gäller att

$$\text{(a) } r = \frac{a+b-c}{2};$$
$$\text{(b) } r = \frac{c-a-b}{2};$$
$$\text{(c) } r = \frac{3a+2b-2c}{2};$$
$$\text{(d) } r = \frac{2c-a-b}{2}.$$

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{11}{12} - \frac{13}{16}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange det största reella tal a sådant att alla lösningar till ekvationen
$$3x^2 + ax - (a^2 - 1) = 0$$
är reella och positiva.

23. Givet funktionen $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$, ange $f'(2)$.

24. Beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{2} \big(2x^3 + 5x^2 + \cos x - \sin 2x\big)\, dx$.

25. De reella talen a och b uppfyller $a+b = 1$. Ange det största värde produkten ab kan anta.

26. Lös olikheten $\dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{6-x-x^2}} \geq 0$. Ange summan av alla heltalslösningar.

27. Givet är att $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, och att $\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = 3$. Beräkna vinkeln $\alpha + \beta$ och ange dess värde i radianer.

28. Sträckan AC är 15 cm lång. Punkten B ligger mellan A och C. Beräkna avståndet mellan mittpunkterna på sträckorna AB och BC, och ange svaret i mm.

29. Höjden mot basen i en likbent triangel är 4 cm lång och dess area är 12 cm^2. Beräkna $\cos\gamma$, där γ är vinkeln mellan triangelns två lika långa ben.

30. Parallellogrammen $ABCD$ har sidlängder 5 cm och 3 cm, och vinkel mellan diagonalerna 45°. Beräkna parallellogrammens area och ange den i mm^2.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Finn alla reella lösningar till ekvationen

$$\left| x^2 - 2|x| \right| = 1.$$