Arkitektur och teknik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

Antagningsprov 2010 - MATEMATIK - SVAR

A.

1b
2b
3c
4d
5b
6a
7a
8d
9b
10d
11a
12d
13a
14b
15b
16b
17d
18d
19b
20c

B.

21: $-\dfrac{7}{57}$

22: $\dfrac{-2-\sqrt{55}}{3}$

23: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos^2 1}-\tan 1\right)$

24: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2\pi}$

25: $\dfrac{13\pi^2}{9}$

26: 1

27: $\dfrac{1}{2}$

28: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

29: $\dfrac{25}{6}$

30: $\dfrac{3\pi}{5}$

C. *Lösning:* Rotuttrycket i vänsterledet (v.l.) är definierat för $x \geq -\frac{1}{15}$. Uttrycket under rottecknet i högerledet (h.l.) kan skrivas om som $(x-3)^2$, och är således icke-negativt för alla reella x. Kvadrering av en ekvation ger en ekvation ekvivalent med den givna förutsatt att v.l. och h.l. har samma tecken. Vi flyttar därför över tvåan från v.l. till h.l.

$$\sqrt{15x+1} = 2 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

Eftersom $\sqrt{a^2} = |\,a|$ för alla reella a, får vi för $x \geq -\frac{1}{15}$, efter kvadrering och en viss förenkling, den ekvivalenta ekvationen

$$(x-3)^2 + 4|\,x-3| - 15x + 3 = 0.$$

Vi kan införa en ny variabel, $t = x - 3$, vilket, för $t \geq -\frac{1}{15} - 3 = -\frac{46}{15}$, ger en ekvation med t som obekant, ekvivalent med den givna ekvationen med x som obekant

$$t^2 + 4|\,t| - 15t - 42 = 0.$$

För $t \geq 0 \left(> -\frac{46}{15} \right)$ får vi

$$t^2 - 11t - 42 = 0,$$

som har lösningarna

$$t_1 = \frac{11 - \sqrt{121+168}}{2} = -3, \qquad t_2 = \frac{11 + \sqrt{121+168}}{2} = 14.$$

Av dessa uppfyller endast t_2 kravet $t \geq 0$.

För $0 > t \geq -\frac{46}{15}$ får vi

$$t^2 - 19t - 42 = 0$$

som har lösningarna

$$t_3 = \frac{19 - \sqrt{361+168}}{2} = \frac{19-23}{2} = -2, \qquad t_4 = \frac{19 + \sqrt{529}}{2} = \frac{19+23}{2} = 21.$$

Av dessa uppfyller endast t_3 kravet $0 > t \geq -\frac{46}{15}$.

För den ursprungliga ekvationen får vi de två lösningarna $x = 14 + 3 = 17$, och $x = -2 + 3 = 1$.