Chalmers tekniska högskola
Matematik- och fysikprovet

Arkitektur och teknik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

Antagningsprov 2010 - MATEMATIK

2010-05-08, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a = 1,\ b = -2$, och $x = a^2\sqrt{ab + b^2 + 2}$, så gäller

   (a) $x = \pm 2$; (b) $x = 2$; (c) $x = -2$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $U = \dfrac{6}{9 - x^2} + \dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{1}{x + 3}$, så gäller för alla $x \neq \pm 3$ att

   (a) $U = 0$; (b) $U = \dfrac{2}{x + 3}$; (c) $U = \dfrac{2}{x - 3}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $a > \sqrt{b},\ a^2 = b + 1$ och $U = \left(\sqrt{a - \sqrt{b}} - \sqrt{a + \sqrt{b}}\right)^2$, så gäller

   (a) $U = a \pm 1$; (b) $U = 2a \pm 2$; (c) $2a - 2$; (d) inget av (a)-(c).

4. Alla lösningar till olikheten $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1} > 0$ ges av

   (a) alla reella tal x sådana att $x \neq 0, x \neq -1$;
   (b) alla positiva tal x;
   (c) alla reella tal x sådana att $x < -1$;
   (d) ingen av mängderna (a)-(c) ger alla lösningar.

5. Summan av alla heltal som är lösningar till olikheten $x^2 - 7x + 10 < 0$ är

   (a) 14; (b) 7; (c) annat tal; (d) det finns inga heltalslösningar.

6. Om $m \boxplus n = m(n-1)$ för alla heltal m och n, så gäller att $7 \boxplus (3 \boxplus 12)$ är lika med

   (a) 224; (b) 154; (c) 231; (d) annat svar.

7. Ekvationen $x^2 + bx + c = 0$ har för $c < 0$

   (a) två olika reella lösningar;
   (b) endast en reell lösning;
   (c) inga reella lösningar;
   (d) man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

8. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har för $c < 0$

   (a) två olika reella lösningar;
   (b) endast en reell lösning;
   (c) inga reella lösningar;
   (d) man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

9. Alla reella lösningar till ekvationen $\ln x + \ln(x+1) = 0$ ges av

   (a) $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; (b) $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$;
   (c) ekvationen har inga reella lösningar; (d) inget av (a)-(c).

10. För alla positiva tal x gäller att

    (a) $\ln \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\ln x}$; (b) $\ln \dfrac{1}{x} = 1 - \ln x$;
    (c) $\ln \dfrac{1}{x} = \ln(-x)$; (d) inget av (a)-(c).

11. Lösningen till ekvationen $e^x = \sqrt{2} - 1$ ges av

    (a) $\ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$; (b) $\dfrac{1}{2} \ln 2 - 1$; (c) $\dfrac{1}{2} \ln 2$; (d) annat tal.

12. Om α är vinkel i en triangel och $\sin \alpha = \dfrac{2}{3}$, så gäller att $\cos \alpha$ är lika med

    (a) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; (b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

13. Om α är vinkel i en triangel och $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, så gäller att $\sin\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; (b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

14. Om $\sin\alpha = p$, och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ så gäller att $\tan\alpha$ är lika med

(a) $\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (b) $-\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (c) $\pm\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$; (d) annat svar.

15. Likheten $|\,xy| = -x|\,y|$ gäller

(a) för alla $x \geq 0$; (b) för alla $x \leq 0$; (c) aldrig; (d) annat svar.

16. Summan av de reella lösningarna till ekvationen $|\,|\,x-1|-1| = 3$ är

(a) 4; (b) 2; (c) annat tal; (d) det finns inga reella lösningar.

17. Det är *inte* sant att

(a) Varje kvadrat är en parallellogram.
(b) Varje rektangel är en parallellogram.
(c) Varje romb är en parallellogram.
(d) Varje parallelltrapets är en parallellogram.

18. En rektangel har diagonallängd 8 längdenheter. Om rektangelns omkrets är 24 l.e., så är dess area

(a) 32 areaenheter; (b) 40 areaenheter; (c) annat tal;
(d) det finns ingen sådan rektangel.

19. Höjden mot basen i en likbent triangel är 7 längdenheter lång. Om triangelns omkrets är $18 + 8\sqrt{2}$ l.e., så är dess area

(a) $56\sqrt{2}$ areaenheter; (b) $28\sqrt{2}$ areaenheter; (c) annat tal;
(d) det finns ingen sådan triangel.

20. Givet triangeln ABC med sidlängder $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, låt h_c vara längden av höjden mot sidan AB. Då gäller

(a) $h_c = \dfrac{\sqrt{(2a+2b-c)(2a-2b+c)(2b+2c-a)(a+b+c)}}{2c}$;

(b) $h_c = \dfrac{\sqrt{abc\,(a+b+c)}}{2c}$;

(c) $h_c = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{2c}$;

(d) $h_c = \dfrac{\sqrt{ab\,(a+b+c)}}{2c}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna
$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{9}}{\frac{2}{7}+\frac{1}{6}}.$$
Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange den minsta lösningen till ekvationen $3x^2 + 4x - 17 = 0$.

23. Givet funktionen $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+x^2}$, ange $f'(1)$.

24. Beräkna $\int_0^{\pi} \left(\sin(\pi - x) + e^{2x}\right)\, dx$.

25. Ange summan av kvadraterna på de lösningar till ekvationen $\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{3}$ som ligger mellan $-\pi$ och π.

26. Ange summan av alla heltalslösningar till olikheten $\dfrac{8}{3^x - 2} \geq 3^x$.

27. Det reella talet a är sådant att funktionen $f(x) = ax^3 + a^2x^2 - x + 1$ har lokalt maximum för $x = -1$. Ange det värde på a, för vilket detta lokala maximum är minst.

28. En triangel har sidlängderna $3, 5$ och 7 längdenheter. Ange $\cos\gamma + \sin\gamma$, där γ är den största vinkeln i triangeln.

29. En cirkel tangerar en rät linje i punkten A. Punkten P på cirkeln projiceras vinkelrätt på linjen på punkten Q. Om $|PQ| = 3$ längdenheter och $|AQ| = 4$ längdenheter, bestäm cirkelns radie.

30. Fyrhörningen $ABCD$ är en parallellogram, i vilken diagonalen BD är lika lång som sidan AB. Punkten F på sidan CD är sådan att $|BF| = |BC| = |FD|$. Bestäm parallellogrammens vinklar och ange vinkel $\angle ABC$.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Finn alla reella lösningar till ekvationen

$$\sqrt{15x+1} - 2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$