

Arkitektur och teknik, Teknisk fysik, Teknisk matematik
Antagningsprov 2009 - MATEMATIK - SVAR

A.

1b

2d

3c

4d

5b

6d

7d

8c

9b

10d

11c

12b

13d

14c

15a

16a

17d

18a

19b

20a

B.

21: $-\frac{45}{119}$

22: -1

23: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

24: $\frac{199}{20} + e^{-1} - e^{-2}$

25: $1 + \sqrt{2}$

26: $\frac{10\pi}{3}$

27: 4

28: -6

29: $a^2\sqrt{3}$

30: $\frac{4}{3}$

C. *Lösning*: Eftersom triangeln ABC är likbent och $\angle C = 90^\circ$, får vi (enligt basvinkelsatsen) att $\angle A = \angle B = 45^\circ$. Dessutom är det givet att $\angle ACP = \angle PCQ = \angle QCB = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$. Sinussatsen, tillämpad på triangel APC , ger

$$\frac{|AP|}{\sin 30^\circ} = \frac{|CA|}{\sin(180^\circ - 45^\circ - 30^\circ)} = \frac{1}{\sin 105^\circ}.$$

Vi kan räkna ut $\sin 105^\circ$ genom att använda formeln för sinus av en summa

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

För sträckan AP får vi

$$|AP| = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

På samma sätt får vi (ur triangeln BCQ) att

$$|BQ| = |AP| = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Pythagoras' sats ger $|AB| = \sqrt{|CA|^2 + |CB|^2} = \sqrt{2}$, och det följer att

$$|PQ| = |AB| - |AP| - |BQ| = \sqrt{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}.$$