Chalmers tekniska högskola
Matematik- och fysikprovet

Arkitektur och teknik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

Antagningsprov 2009 - MATEMATIK

2009-05-16, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, och $x = \sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[4]{a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{bc^2}$, så gäller

   (a) $x = ab^2\sqrt{c}$; (b) $x = ab^2\sqrt{bc}$; (c) $x = ab\sqrt{bc}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Den minsta gemensamma nämnaren till $\frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{5}{16}, \frac{2}{5}$ är

   (a) 10; (b) 180; (c) 960; (d) annat svar.

3. Summan av alla lösningar till ekvationen $(2x-1)(3x+2)(x+5) = 0$ är

   (a) -6; (b) $-\dfrac{26}{5}$; (c) $-\dfrac{31}{6}$; (d) annat svar.

4. Olikheten $\frac{x+5}{x-1} \geq 0$ har samma lösningar som olikheten

   (a) $(x+5)(x-1) \geq 0$; (b) $(x+5)(x-1) > 0$;
   (c) $(x+5)(x-1) \neq 0$; (d) inget av (a)-(c).

5. Olikheten $\frac{x+5}{x-1} > 0$ har samma lösningar som olikheten

   (a) $(x+5)(x-1) \geq 0$; (b) $(x+5)(x-1) > 0$;
   (c) $(x+5)(x-1) \neq 0$; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $a \boxplus b = \frac{a}{a^2+b^2+1}$ för alla reella tal a och b, så är det *inte* sant att

   (a) $0 \boxplus x \geq 0$ för alla reella x;
   (b) $x \boxplus 0 \leq 1$ för alla reella x;
   (c) $1 \boxplus x = 1 \boxplus (-x)$ för alla reella x;
   (d) $x \boxplus 1 = (-x) \boxplus (-1)$ för alla reella x.

7. Givet är att ekvationen $x^2 + px + 7 = 0$, där p är ett reellt tal, har två reella lösningar. Då kan man dra slutsatsen att

   (a) båda lösningarna är positiva;
   (b) båda lösningarna är negativa;
   (c) en av lösningarna är positiv och den andra negativ;
   (d) man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

8. Givet är att ekvationen $x^2 + px - 7 = 0$, där p är ett reellt tal, har två reella lösningar. Då kan man dra slutsatsen att

   (a) båda lösningarna är positiva;
   (b) båda lösningarna är negativa;
   (c) en av lösningarna är positiv och den andra negativ;
   (d) man kan inte dra någon av slutsatserna (a)-(c).

9. Om $x > y > 0$, så gäller att

   (a) $\ln(x-y) = \ln x - \ln y$;
   (b) $\ln(x^2 - y^2) = \ln(x+y) + \ln(x-y)$;
   (c) $\ln \dfrac{x}{y} = 1 - \ln \dfrac{y}{x}$;
   (d) inget av (a)-(c).

10. Om $\ln a + \ln b + \ln c = 0$, så gäller att

    (a) $abc = 0$; (b) $a + b + c = 1$;
    (c) $a + b + c = 0$; (d) inget av (a)-(c).

11. Om $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$ och $\pi < \alpha < 2\pi$, så är $\sin 2\alpha$ lika med

    (a) $-\dfrac{2\sqrt{6}}{25}$; (b) $\dfrac{2\sqrt{6}}{25}$; (c) $\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$; (d) annat svar.

12. Om α är vinkel i en triangel och $\tan\alpha = 7$, så gäller att

(a) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$;
(b) $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;
(c) det finns ingen sådan vinkel α;
(d) inget av (a)-(c).

13. Antalet lösningar till ekvationen $\cos^2 x = \cos 2x$ för $0 \leq x \leq 2\pi$ är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

14. Talet $|2\sqrt{2} - 3| + |3 - \sqrt{5}|$ är lika med

(a) $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$; (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$; (c) $6 - 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$; (d) annat svar.

15. Talet $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ är lika med

(a) 2; (b) $2\sqrt{3}$; (c) $2\sqrt[4]{5}$; (d) annat svar.

16. Antalet reella lösningar till ekvationen $x^2 + 4 + |x - 1| = 4x$ är

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) annat svar.

17. För alla positiva tal a, b gäller olikheten

(a) $a + b \geq ab$; (b) $a + b \leq ab$; (c) $a + b \neq ab$;
(d) ingen av olikheterna (a)-(c) gäller för alla positiva tal a, b.

18. Om ABC är en triangel med sidlängder a, b, c, där $a \leq b \leq c$, och om R är radien till cirkeln som går genom punkterna A, B, C, så gäller olikheten

(a) $R \geq \dfrac{c}{2}$; (b) $R \leq \dfrac{c}{2}$; (c) $R \neq \dfrac{c}{2}$;
(d) ingen av olikheterna (a)-(c) gäller för alla trianglar.

19. En kub med kantlängd a skärs av ett plan som innehåller två parallella kanter i kuben, men som inte innehåller någon av kubens sidoytor. Kuben skär av planet en figur med area

(a) a^2; (b) $a^2\sqrt{2}$; (c) $2a^2$; (d) annat svar.

20. Givet triangeln ABC med sidlängder $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, låt l_c vara längden av bisektrisen till vinkeln C. Då gäller

(a) $l_c^2 = ab\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$; (b) $l_c^2 = c^2\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$;
(c) $l_c^2 = abc\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$; (d) $l_c^2 = a^2\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{8}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{9}+\frac{5}{6}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange det minsta reella tal a, för vilket ekvationen $x^2+4x+a^2-3a=0$ har en reell dubbelrot.

23. Givet funktionen $f(x)=\ln(x^2+1)$, ange $f'(\sqrt{2})$.

24. Beräkna $\int_1^2 (x^3+x^4+e^{-x})\,dx$.

25. Ange den minsta (reella) lösningen till ekvationen

$$\sqrt{2x+1}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=2.$$

26. Lös ekvationen $2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$. Ange summan av alla lösningar som uppfyller $0\leq x\leq 2\pi$.

27. Ange antalet lösningar (d.v.s. antalet lösningspar (x, y)) till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= 58 \\ xy &= 21 \end{cases}.$$

28. Ange det minsta heltal n sådant att det finns en vinkel α, för vilken $3\sin\alpha=n^2+6n+2$.

29. Beräkna produkten av diagonalernas längder i en romb med sidängd a och spetsig vinkel $60°$.

30. Givet kvadraten $ABCD$, låt M vara mittpunkten på sidan CD och beteckna $\alpha=\angle AMB$. Beräkna $\tan\alpha$.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Triangeln ABC är rätvinklig och likbent, med rät vinkel vid C och $|CA| = |CB| = 1$ (längdenhet). Punkterna P och Q på sidan AB är sådana att sträckorna CP och CQ delar vinkeln vid C i tre lika delar. Beräkna längden av sträckan PQ.