Chalmers tekniska högskola
Matematik- och fysikprovet

Arkitektur och teknik, Teknisk fysik, Teknisk matematik

Antagningsprov 2008 - MATEMATIK

2008-05-17, kl. 9.00 - 12.00
Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.

Svar på uppgifterna i del A (uppgifter 1 - 20) och del B (uppgifter 21 - 30) lämnas in på utdelat svarsformulär. Den fullständiga lösningen till uppgiften i del C lämnas in på utdelat lösblad.

A. Markera rätt svar genom att ringa in rätt svarsalternativ på svarsformuläret. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Den enda lösningen till ekvationen $x\sqrt{2} = 1 - x$ ges av

   (a) $x = \sqrt{2} - 1$; (b) $x = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$; (c) $x = \sqrt{2} + 1$; (d) inget av (a)-(c).

2. Om $b = \frac{(a^{\frac{1}{2}}+1)^2 - (a^{\frac{1}{2}}-1)^2}{2}$, $(a \geq 0)$, så gäller

   (a) $b = a + 1$; (b) $b = 0$; (c) $b = 2\sqrt{a}$; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$, så gäller

   (a) $f(x) = 2$; (b) $f(x) = 2x$; (c) $f(x) = 2\sqrt{x}$; (d) inget av (a)-(c).

4. Alla lösningar till olikheten $\frac{2x+5}{x-1} \geq 0$ ges av

   (a) $x \geq -\dfrac{5}{2}$; (b) $x \leq -\dfrac{5}{2}$; (c) $x > 1$; (d) inget av (a)-(c).

5. Om $a \boxplus b = \left(\frac{a}{b}\right)^a$ för alla positiva reella tal a och b, så är $2 \boxplus (1 \boxplus 3)$ lika med

   (a) $\dfrac{16}{9}$; (b) 36; (c) $\dfrac{256}{81}$; (d) annat svar.

6. En funktion av typen $f(x) = ax^2 + 7x + 1$, där a är ett reellt tal,

   (a) har alltid ett minsta värde;
   (b) har alltid ett största värde;
   (c) har alltid antingen ett minsta eller ett största värde;
   (d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

7. Om $\ln a = 3$ och $\ln b = -1$, så är a lika med

   (a) b^3;   (b) $b \ln 3$;   (c) b^{-3};   (d) annat svar.

8. Om $x > 0$ och $y > 0$, så gäller att

   (a) $\ln(x^y) = x \ln y$;
   (b) $\ln(x^y) = y \ln x$;
   (c) $\ln(x^y) = \ln x \ln y$;
   (d) inget av (a)-(c).

9. Om α är vinkel i en triangel och $\tan \alpha = -2$, så gäller

   (a) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;
   (b) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
   (c) kan ej avgöras;
   (d) det finns ingen sådan vinkel α.

10. Om $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ och $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så är $\tan \alpha$ lika med

    (a) $\dfrac{4}{3}$;   (b) $-\dfrac{3}{4}$;   (c) $-\dfrac{4}{3}$;   (d) annat svar.

11. Antalet lösningar till ekvationen $\sin x = \sin 2x$ för $\pi \leq x \leq 2\pi$ är

    (a) 1;   (b) 2;   (c) 3;   (d) annat svar.

12. Antalet reella lösningar till ekvationen $|\,x + 2| = 1$ är lika med

    (a) 1;   (b) 2;   (c) 4;   (d) annat svar.

13. Antalet komplexa lösningar till ekvationen $|\,z + 2| = 1$ är lika med

    (a) 1;   (b) 2;   (c) 4;   (d) annat svar.

14. För alla reella x och alla heltal $n > 2$ gäller att

(a) $\sin^n x + \cos^n x = 1$;
(b) $\sin^n x + \cos^n x > 1$;
(c) $\sin^n x + \cos^n x < 1$;
(d) inget av (a)-(c) gäller för alla reella x och alla $n > 2$.

15. Om a, b är kateterna och c är hypotenusan i en rätvinklig triangel, och om n är ett heltal större än 2, så

(a) $a^n + b^n = c^n$;
(b) $a^n + b^n > c^n$;
(c) $a^n + b^n < c^n$;
(d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

16. Om $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{för } x \geq 0 \\ 1, & \text{för } x < 0 \end{cases}$, så gäller

(a) $f'(1) = 3$; (b) $f'(1) = 2x$; (c) $f'(1) = 0$; (d) inget av (a)-(c).

17. Om funktionen $f(x)$ är deriverbar för alla x, så är $f'(1)$

(a) en funktion av x;
(b) tangenten till f:s graf i punkten $(1, f(1))$;
(c) vinkeln mellan positiva x-axeln och tangenten till f:s graf i $(1, f(1))$;
(d) inget av (a)-(c).

18. Om $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, där ln är den reella naturliga logaritmen, så gäller

(a) $f'(0) > 0$; (b) $f'(0) = 0$; (c) $f'(0) < 0$; (d) inget av (a)-(c).

19. Pappersformaten Ak är konstruerade så att kortsidan på ett Ak-pappersark är lika lång som långsidan på ett A$(k + 1)$-ark, och arean av ett Ak-ark är dubbelt så stor som arean av ett A$(k + 1)$-ark. En ritning utförs i skala $1 : 100$ på ett A3-ark som sedan förstoras till A1-format. Skalan efter förstoringen är

(a) $1 : 200$; (b) $1 : 141$; (c) $1 : 50$; (d) inget av (a)-(c).

20. Gatorna i staden Koge bildar ett rätvinkligt nät. Avståndet mellan två gatuhörn A och B fågelvägen är 2,5 km. En bra uppskattning av hur mycket man kan behöva gå som mest mellan A och B är

(a) 2,5 km; (b) 3 km; (c) 3,5 km; (d) 4 km.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar på svarsformuläret. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{7}{3} - 0,35}{3 + \frac{5}{6}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är heltal och bråket $\frac{p}{q}$ är maximalt förkortat.

22. Ange den minsta lösningen till ekvationen $3x^2 + 7x + 1 = 0$.

23. Givet funktionen $f(x) = \frac{\sin^2 x}{e^x}$, ange $f'(\frac{\pi}{4})$.

24. Beräkna $\int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + e^{3x} - e^{2x})\, dx$.

25. Ange antalet heltalslösningar till ekvationen $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2^6$.

26. Om $t = \cos x$, uttryck $\cos 3x$ som ett polynom av t och ange summan av polynomets alla koefficienter.

27. Givet två cirklar med gemensam medelpunkt och radie 1 respektive 4, finn radien till en tredje cirkel med samma medelpunkt, sådan att den delar arean av cirkelringen mellan de två givna cirklarna i förhållande $1 : 2$, räknat från medelpunkten.

28. En kvadrat är inskriven i en rätvinklig triangel med kateter 4 och 5 på ett sådant sätt att ett av hörnen sammanfaller med det hörn i triangeln i vilket vinkeln är rät (och alla dess hörn ligger på triangelns sidor). Bestäm kvadratens sidlängd.

29. Punkten M är mittpunkt på sidan AB i triangeln ABC. Beräkna triangeln ABC:s omkrets, givet att triangeln AMC är liksidig och att $|AB| = 12$ l.e.

30. Ange den minsta lösningen till ekvationen $\sqrt{4 + x\sqrt{2x^2 - 17}} = x + 2$.

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Finn alla (reella) lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = \ \ 3 \end{cases} .$$