Chalmers, Teknisk fysik & Arkitektur och teknik

Matematik- och fysikprovet 2007 - Matematikdelen - SVAR

A.

1d
2d
3a
4c
5c
6a
7b
8b
9a
10a
11c
12c
13b
14c
15c
16d
17b
18b
19d
20d

B.

21. $\frac{29}{39}$

22. $\frac{-9+\sqrt{57}}{4}$

23. 1

24. 1

25. $\log_3 2$ $(= \frac{\ln 2}{\ln 3})$

26. $\frac{7}{12}$

27. $\frac{1}{16}$

28. $\frac{1}{2}$

29. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

30. 4

C. *Lösning:* Med hjälp av trigonometriska ettan kan ekvationen skrivas om till

$$2(1-\sin^2 x)-\sin x = 1.$$

Sätt $t=\sin x$. Vi får då en andragradsekvation för t

$$2t^2+t-1=0,$$

som har lösningarna $t_1=-1$ och $t_2=\frac{1}{2}$. Det återstår nu att lösa ekvationerna $\sin x=-1$ och $\sin x=\frac{1}{2}$. Den första av dem har lösningarna

$$x_n=\frac{3\pi}{2}+2n\pi, \quad \text{där } n \text{ är ett godtyckligt heltal,}$$

medan den andra har lösningarna

$$x_n'=\frac{\pi}{6}+2n\pi \quad \text{samt} \quad x_n''=(\pi-\frac{\pi}{6})+2n\pi, \quad \text{där } n \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

Den givna ekvationen har alltså lösningarna

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3\pi}{2}+2n\pi,\\ x_n' &= \frac{\pi}{6}+2n\pi,\\ x_n'' &= \frac{5\pi}{6}+2n\pi, \end{aligned}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Alternativ lösning: Eftersom $2\cos^2 x-1=\cos 2x$, kan ekvationen skrivas om till

$$\cos 2x=\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x).$$

Lösningarna är då alla reella x sådana att

$$2x=\pm(\frac{\pi}{2}-x)+2k\pi, \quad \text{där } k \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

Vid val av plustecken: För $k=3n$ (d.v.s. k delbart med 3) får vi lösningsskaran $\{x_n'\}$ från ovan, för $k=3n+1$ (k ger rest 1 vid division med 3) får vi lösningsskaran $\{x_n''\}$ och, slutligen, för $k=3n+2$ (k ger rest 2 vid division med 3) får vi lösningsskaran $\{x_n\}$.

Vid val av minustecken: Vi får lösningarna $\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$, vilket är samma lösningsskara som $\{\frac{3\pi}{2}+2n\pi\}$.