Chalmers: Arkitektur och teknik, Automation och mekatronik, Elektroteknik, Teknisk fysik, Teknisk kemi, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik, Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik

SU: Kandidatprogrammen i matematik, i matematik och datavetenskap, i matematik och maskininlärning, i matematisk ekonomi och statistik, i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

Antagningsprov 2026 - MATEMATIK - SVAR

A.

1 Uppgiften tillåter olika tolkningar. Alla som skrev provet får 1p på den.
2b
3c
4c
5c
6b
7a
8b
9d
10c
11a
12c
13c
14d
15b
16b
17d
18c
19a
20a

B.

21: $-\frac{77}{81}$;

22: $2-\sqrt{5}$;

23: $2(2-\sqrt{2})$;

24: $-\frac{7}{2}-\ln 3+\ln 4-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}e^{-2}$;

25: $-\frac{7\pi}{6}$;

26: 4;

27: $\frac{1}{3}$;

28: $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ l.e.;

29: $7\sqrt{2-\sqrt{3}}$ l.e.;

30: $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

C. *Lösning:* Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet. De två rötterna kräver att

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

och

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Alla lösningar till den första olikheten ges av alla x som uppfyller $x \leq -1$ eller $x \geq -\frac{1}{2}$, medan alla lösningar till den andra olikheten ges av de x som uppfyller $x \leq \frac{1}{2}$ eller $x \geq 1$. Vi får alltså att båda kvadratrötterna är definierade för de x som uppfyller någon av olikheterna

$$x \leq -1, \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \qquad x \geq 1.$$

Vi skriver nu om den givna ekvationen till den ekvivalenta ekvationen

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = x + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}.$$

Likheten är endast möjlig om $x + \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq 0$, eftersom vänsterledet är icke-negativt för alla x i definitionsmängden. För de x som ligger i definitionsmängden och uppfyller det nya villkoret kan vi kvadrera och får då

$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 2x^2 - 3x + 1,$$

vilket efter en enkel omskrivning ger

$$2x\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 6x - x^2.$$

Vi ser att $x = 0$ är en lösning (0 ligger i definitionsmängden och $0 + \sqrt{1} \geq 0$). För $x \neq 0$ kan vi förkorta ett x och får

$$2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 6 - x.$$

Vänsterledet är icke-negativt, vilket ställer kravet $x \leq 6$. För sådana x kan vi kvadrera och får den ekvivalenta ekvationen

$$4(2x^2 - 3x + 1) = 36 - 12x + x^2,$$

vilket förenklas till $7x^2 = 32$, med lösningarna $x = \pm\frac{4\sqrt{14}}{7}$.

Det återstår att undersöka om dessa två lösningar ligger i definitionsmängden och om de uppfyller de två villkoren som uppkom vid de två kvadreringarna. Vi har

$$\frac{4\sqrt{14}}{7} > \frac{4 \cdot 3}{7} = \frac{12}{7} > 1, \qquad -\frac{4\sqrt{14}}{7} < -\frac{12}{7} < -1,$$

så båda ligger i definitionsmängden. Dessutom,

$\frac{4\sqrt{14}}{7} < \frac{16}{7} < 6,$ och den negativa lösningen är uppenbarligen mindre än 6.

Återstår att undersöka om $x + \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq 0$ för de två lösningarna. För den positiva lösningen har vi en summa av två icke-negativa termer, så olikheten är sann. För den negativa lösningen får vi

$$-\frac{4\sqrt{14}}{7} + \sqrt{\frac{64}{7} + \frac{12\sqrt{7}}{7} + 1} > -\frac{4\sqrt{14}}{7} + \sqrt{\frac{64}{7}} = -\frac{4\sqrt{14}}{7} + \frac{4\sqrt{14}}{7} \cdot \sqrt{2} > 0.$$

Alla tre lösningarna vi fann ligger i definitionsmängden och uppfyller villkoren som ställdes vid kvadreringarna. De löser alltså även den ursprungliga ekvationen och vi får att den har de tre lösningarna

$$x_1 = -\frac{4\sqrt{14}}{7}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$